

Nome: _____ Cognome: _____ Matricola.: _____

Motivare tutte le risposte!

Es 1 [15 pt] Scrivere e dimostrare le formule per l'espansione in fratti parziali di $f(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$.**Es 2** [15 pt] Scrivere e dimostrare le formule per l'espansione in prodotti infiniti di Weierstrass di $f(z) = \cos \pi z$.**Es 3** [10 pt] Sviluppare in serie di Laurent la funzione $f(z) = z^3 e^{1/z}$ nella corona $\{0 < |z| < +\infty\}$.**Es 4** [30 pt] (i) Determinare la mappa di Möbius $f(z)$ tale che $f(i) = 0$, $f(\infty) = 1$, $f(-i) = \infty$.(ii) Trovare l'immagine del semipiano $\{\operatorname{Re} z < 1\}$ della mappa $f(z) = \frac{4z}{z+1}$.(iii) Determinare una mappa conforme del semidisco $A = \{|z| < 1, \operatorname{Re} z > 0\}$ sulla semistriscia $B = \{0 < \operatorname{Im} w < \pi, \operatorname{Re} w < 0\}$.**Es 5** [15 pt] Determinare l'immagine di $A = \{|z| > 2\}$ tramite l'applicazione $w(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$.**Es 6*** [15 pt] Determinare una mappa conforme di $A = \{|z-1| < \sqrt{2}\} \cap \{|z+1| < \sqrt{2}\}$ sul semipiano $\{\operatorname{Im} w > 0\}$.**Risposte**

3)
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{(3-n)!} + \frac{1}{6} + \frac{z}{2} + z^2 + z^3.$$

4) (i) $f(z) = \frac{z-i}{z+i}.$

(ii) $\{w \in \mathbb{C} : |w-3| > 1\}$

(iii) $f(z) = \log(iz)$ ($\log x > 0$ se $x > 0$).

5) L'esterno dell'ellisse di semiassi $5/4$ e $3/4$.

6)
$$f(z) = i \left(\frac{z+i}{z-i} \right)^2.$$