Appello A − AC310 **(AA 2023/24 – L. Chierchia) 15/1/2024**

Nome:________________ **Cognome:**________________ **Matricola.:**________________

Motivare tutte le risposte!

Es 1 [10 pt] Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione $z^6 - 6z + 10 = 0$ nella regione $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.

Es 2 [15 pt] (i) Trovare la trasformazione di Möbius $f(z)$ tale che $f(0) = 0$, $f(1+i) = \infty$ e $f(2i) = 2i$.
(ii) Determinare l'insieme $f(D)$ con $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| < 1\}$.

Es 3 [15 pt] Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_{C_1 - C_2} \frac{1}{(z^2-1)^2(z-3)^2}\, dz$, dove $C_1 = \{4e^{it} : t \in [0, 2\pi]\}$ e $C_2 = \{2e^{it} : t \in [0, 2\pi]\}$ (l'orientamento di C_j è dato dalle curve che lo definiscono).

Es 4 [10 pt] Dare la definizione di convergenza assoluta di un prodotto infinito $\displaystyle\prod_{n\geq 1}(1+\alpha_n)$ con $\alpha_n \in \mathbb{C}$ e dimostrare che $\displaystyle\prod_{n\geq 1}\Big(1-\frac{z}{n}\Big)e^{\frac{z}{n}}$ converge assolutamente in $\mathbb{C}\backslash\mathbb{N}$.

Es 5 [15 pt] Trovare una trasformazione conforme che mandi il primo ottante complesso $\{z : 0 < \arg z < \pi/4\}$ (dove $\arg x = 0$ per $x > 0$) sulla striscia $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$.

Es 6 [20 pt] Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)}{x^2 - 2x + 2} \cos x \, dx$.

Es 7 [15 pt] Derivare l'espansione in fratti semplici della funzione $\pi^2/\operatorname{sen}^2 \pi z$.

Soluzioni

Es 1 Sia $f = z^6 - 6z$, $g = 10$. Poiché se $|z| = 1$, $|f| \leq 7 < 10 = |g|$, da Rouché segue che $z^6 - 6z + 10 = 0$ non ha soluzioni in $\{|z| < 1\}$ e quindi ha 6 soluzioni in $\{|z| > 1\}$.

Es 2 $f(z) = (i-1)\dfrac{z}{z-1-i}$ e $f(D) = \{\operatorname{Re} w > 0\}$ ($f(0) = 0$ e $f(2i) = 2i$ e quindi $f(\partial D) = i\mathbb{R}$; e $f(i) = 1 - i \in \{\operatorname{Re} w > 0\}$).

Es 3 Sia $f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2(z-3)^2}$, allora $\displaystyle\int_{C_1 - C_2} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 3) = -\frac{3\pi i}{64}$.

Es 4 $\displaystyle\sum\Big|\Big(1-\frac{z}{n}\Big)e^{\frac{z}{n}}\Big| \approx \sum \frac{|z|^2}{n^2} < \infty$.

Es 5 $f(z) = \frac{4}{\pi}\log z$ ($\log x > 0$ per $x > 1$).

Es 6 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)}{x^2-2x+2}\cos x\, dx = \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)}{x^2-2x+2}\, e^{ix}\, dx = \operatorname{Re}\Big(2\pi i \operatorname{Res}\big(\frac{(z-1)}{z^2-2z+2}\, e^{iz}, i\big)\Big) = -\frac{\pi \sin 1}{e}$.

Es 7 Esercizio discusso in classe.