

Nome: _____ Cognome: _____ Matricola: _____

Motivare tutte le risposte!

Es 1 [10 pt] Determinare la corona di convergenza $\{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-1| < R\}$ della serie di Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{-n^3}+1} (z-1)^n$.

Es 2 [15 pt] Trovare una trasformazione conforme che mandi $D = \{z = re^{it} \mid 0 < t < \pi/4, 0 < r < 1\}$ sulla semistriccia $\{x+iy \mid 0 < x < 1, y > 0\}$.

Es 3 [15 pt] Assumendo nota la relazione $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$, derivare l'espansione in fratti semplici di $\pi \cotan \pi z$.

Es 4 [20 pt] Calcolare l'integrale $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{13+12 \sin t}$ usando il calcolo dei residui.

Es 5 [20 pt] (i) Trovare la trasformazione di Möbius $f(z)$ tale che $f(0) = 0$, $f(i) = i$ e $f(1) = \infty$.

(ii) Determinare l'insieme $f(T)$ dove T è l'interno del triangolo di vertici 0, 1 e i (ossia $T = \{x+iy \mid x, y > 0, x+y < 1\}$).

Es 6 [20 pt] Calcolare l'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{1/3}(x^2+4)} dx$.

Es 1. $R^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^{-n^3}+1} \right)^{\frac{1}{n}} = 1 \rightarrow R=1$, $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^{-n^3}+1} \right)^{\frac{1}{n}} = 0$

Es 2.  $f(z) = -\frac{i}{4} \log z$

Es 3. $D \pi \cotan \pi z = D \left(\frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) \right)$

$\Rightarrow \pi \cotan \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) + c$ e $\pi \cotan \pi z - \frac{1}{z} = 1 + O(z) \Rightarrow c=0$

Es 4. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{13+12 \sin t} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz \left(13+12 \frac{z-\frac{1}{z}}{2i} \right)} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{6z^2+13iz-6}$

$= \oint_{|z|=1} \frac{dz}{6(z+\frac{2}{3})(z+\frac{3}{2})} = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}\pi$

Es 5. $f(z) = (i-1) \frac{z}{z-1}$, $f: i\mathbb{R} \rightarrow \partial D(20, 1)$, $z_0 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$f(0)=0, f(i)=i, f(1)=\infty, f(\infty)=i-1$

$f: \mathbb{R} \rightarrow$ retta per $i-1$ e 0 (quarto d'angolo)

$f: \text{retta per } i \text{ e } 1 \rightarrow$ retta per $i-1$ e i (quarto d'angolo)



Es 6. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^{3/2}} = \int_0^{\infty} \frac{x^{2/3}}{(x^2+4)^{3/2}} dx$, $f(z) = \frac{z^{2/3}}{(z^2+4)^{3/2}}$

$f \in H(\mathbb{C} \setminus [0, +\infty))$

(ramo principale: $f(z) = e^{i\pi/3/32}$)

$f(i) = e^{i\pi/3/32}$

$\lim_{y \rightarrow 0^+} (x+iy)^{2/3} = x^{2/3}$, $\lim_{y \rightarrow 0^-} (x+iy)^{2/3} = e^{i\pi/3} x^{2/3}$

$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^{3/2}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} 2^{-4/3}$



$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|\epsilon|=r} f = 0$, $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|R|=R} f = 0$

$\lim_{y \rightarrow 0^+} (x+iy)^{2/3} = x^{2/3}$

$\Rightarrow (1 - e^{i\pi/3}) \int_0^{\infty} f(x) dx = 2\pi i (\operatorname{Res}(f, 2i) + \operatorname{Res}(f, -2i)) \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^{3/2}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} 2^{-4/3}$