

Lemma

Sia $a_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}, f(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n \in H(D_{r,R})$ con $R = \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \right)^{-1}$

e $r = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_{-n}|^{\frac{1}{n}}$ e $f'(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n n z^{n-1}$ su $D_{r,R}$.

Inoltre se $|z| > R$ e $|z| < r \Rightarrow$ La serie non converge

Dim.

$$f_1(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n, f_2(z) = \sum_{n < 0} a_n z^n, f_1 + f_2 = f$$

f_1 è una serie di potenze con R dato dalla formula di Hadamard

Per f_2 : $g_2(\xi) := f_2\left(\frac{1}{\xi}\right) = \sum_{n \geq 0} a_{-n} \xi^n$ è una serie di potenze con raggio $\rho = \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_{-n}|^{\frac{1}{n}} \right)^{-1}$ quindi converge se $|\xi| < \rho$

e non converge se $|z| < r$ $\left| \frac{1}{z} \right| < \rho \Leftrightarrow |z| > \frac{1}{\rho} =: r$

$$\begin{aligned} f_1'(z) &= \sum_{n \geq 0} a_n n z^{n-1}, f_2'(z) = \left(g_2\left(\frac{1}{z}\right) \right)' = -g_2'\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2} \sum_{n \geq 0} a_{-n} n \left(\frac{1}{z}\right)^{n-1} \\ &= \sum_{n \geq 0} a_{-n} (-n) \left(\frac{1}{z}\right)^{n+1} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n n \left(\frac{1}{z}\right)^{-n+1} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n n z^{n-1} \end{aligned}$$

Oss.

Se $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n z^n$ con $z \in D_{r,R} \Rightarrow a_n = b_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

Dim.

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n z^n \text{ con}$$

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n z^n \in H(D_{r,R}), \text{ per W.L. } A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=p} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$

$$\text{ma } A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=p} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{a_k z^k}{z^{n+1}} dz = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{a_k}{2\pi i} \oint_{|z|=p} \frac{dz}{z^{n+1-k}} \quad \text{CONV. ASS.} \quad |z|=p \quad \forall r < p < R$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta_{nk} = a_n$$

Se sostituisco $\sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k z^k$ ottengo b_n e quindi $a_n = A_n = b_n$

Esercizio

Sviluppare la funzione $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}$ nella corona $1 < |z| < 2$

Svolgimento

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+1} \right)$$

$$\bullet \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2-z} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - (\frac{z}{2})} \right) = -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z}{2} \right)^n$$

$$\bullet \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z(1 + \frac{1}{z})} = \frac{1}{z(1 - (-\frac{1}{z}))} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z} \right)^{n+1} (-1)^n$$
$$= - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z} \right)^n = - \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^n z^n$$

$$\Rightarrow a_n = \begin{cases} -\frac{1}{3 \cdot 2^{n+1}} & n \geq 0 \\ (-\frac{1}{3})^n & n \leq -1 \end{cases} \quad \text{e si ha } f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$$

Lemma 1

Sia $f \in H(D_{r,R})$, $r < 1 < R$. f induce una funzione F analitica esprimibile in serie di Fourier.

Dim.

$F(\theta) := f(e^{i\theta})$ è analitica in θ e periodica di periodo 2π

$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n \Rightarrow F(\theta) = f(e^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{in\theta}$ è una serie di Fourier

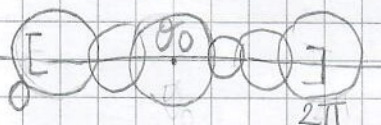
$$\text{con } a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{F(\theta)}{e^{i(n+1)\theta}} \cdot i \cdot e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) e^{-in\theta} d\theta$$
$$=: \hat{F}_n \quad \square$$

Lemma 2

$e^{C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})}$
Data $F(\theta)$ 2π -periodica analitica, $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, è possibile definire $f \in H(D_{r,R})$ t.c. $f(e^{i\theta}) = F(\theta)$.

Dim.

$F(\theta)$ analitica $\Rightarrow \forall \theta_0 \in [0, 2\pi)$ $F(\theta) = \sum c_n (\theta - \theta_0)^n$ con $c_n = \frac{F^{(n)}(\theta_0)}{n!}$



Per compattezza ricopro l'intervallo con un numero finito di palle di raggio $r(\theta_0) = \left(\limsup |c_n|^{1/n} \right)^{-1}$

$F(\theta)$ ha un'estensione olomorfa su $\Sigma_\sigma := \{\theta \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} \theta| < \sigma\}$ con $\sigma > 0$
 Voglio trovare $f(z) \in H(D_{r,R})$ | $f(e^{i\theta}) = F(\theta)$: b.c. $\{Re \theta \in [0, 2\pi], |\operatorname{Im} \theta| < \sigma\} \subseteq B$
 $z = e^{i\theta} \Rightarrow \log z = i\theta \Rightarrow \theta = -i \log z$ $\xrightarrow{\text{F}_{2\pi}\text{-periodica (vale } \forall \theta \in \mathbb{C} \text{ per il principio d'identità)}}$
 $f(z) := F(-i \log z) = F(-i \operatorname{Log} z + 2\pi i k) = F(-i \operatorname{Log} z)$
 $\log z = \operatorname{Log} z + 2\pi i k$ (per ora vale localmente)
 $\Rightarrow f(z)$ è ben definita perché non dipende dalla scelta del ramo
 Inoltre $|z| = |e^{i\theta}| = |e^{i(\theta_1 + i\theta_2)}| = e^{-\theta_2}$, $-\sigma < \theta_2 < \sigma$
 $\Rightarrow f \in H(D_{r,R})$ definendo $r := e^{-\sigma}$, $R := e^\sigma$ □

Teorema (Fourier-Laurent-Weierstrass)

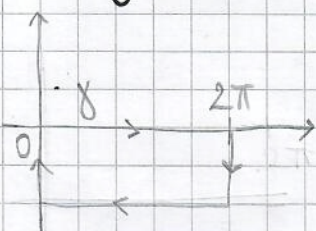
Sia $F \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π -periodica e analitica
 $\Rightarrow F \in H(\Sigma_\sigma)$, $\sigma > 0$ e $F(\theta) = \sum \hat{F}_n e^{in\theta}$ con $\hat{F}_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) e^{-in\theta} d\theta$
 inoltre $|\hat{F}_n| \leq M e^{-|n|\hat{\sigma}}$ con $M := \max_{\Sigma_{\hat{\sigma}}} (F)$.
Dim. $\forall \alpha < \hat{\sigma}$

$F \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \xRightarrow{\text{Lemma 2}} \text{Determino } f \in H(D_{r,R}) \xRightarrow{\text{Lemma 1}} \text{Sviluppabile in serie di Fourier}$

Dunque dobbiamo solo stimare i coefficienti di Fourier:

Fisso $0 < \hat{\sigma} < \sigma$ ed $n \in \mathbb{Z}$ (vediamo il caso $n > 0$, per $n \leq 0$ analogo)
 Sia $n > 0$, $|\hat{F}_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} F(\theta) e^{-in\theta} d\theta \right| \leq \frac{e^{-\hat{\sigma}n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(\theta - i\hat{\sigma})| d\theta \leq M e^{-\hat{\sigma}n}$

Integro sulla seguente curva γ



$$0 = \int_{\gamma} F(\theta) e^{-in\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} F(\theta) e^{-in\theta} d\theta - \int_0^{2\pi} F(\theta - i\hat{\sigma}) e^{-in\theta} e^{-\hat{\sigma}n} d\theta$$

I contributi laterali si cancellano per periodicità □

se $n > 0$ $|n| = n$
 Per $n < 0$ si procede prendendo il rettangolo simmetrico rispetto all'asse x