

ES.1 ("media integrale") Sia $f: D_r(z) \rightarrow \mathbb{C}$ continua.

Dimostrare che $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f(u) du = f(z)$.

Profilamento: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta < r \mid |f(u) - f(z)| < \varepsilon$
 $\forall |u - z| \leq \delta$. Quindi $\forall |h| < \delta$

$$\left| \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f - f(z) \right| = \frac{1}{|h|} \left| \int_{[z, z+h]} (f(u) - f(z)) du \right|$$

$$\leq \frac{1}{|h|} \sup_{[z, z+h]} |f(u) - f(z)| \left| \int_{[z, z+h]} du \right| \leq \varepsilon. \quad \square$$

ES.2. (Viceversa del Corollario 3.4) Sia f cont. su Ω

e t.c. $\int \gamma f = 0 \quad \forall \gamma$ curva chiusa in Ω .

Allora f ha una primitiva.

Profilamento (i) Dalle ipotesi segue che $\gamma_1 \neq \gamma_2$ fanno due curve in Ω con estremi (in ordine)

$$z_1 \neq z_2 \quad \text{allora} \quad \int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f.$$

segue quel fatto che $\gamma_1 - \gamma_2$ è una curva chiusa.

(ii) A fissi un pto qualunque z_0 in Ω .

la tesi segue dall'ES.1.

Mettendo assieme il Corollario 3.4 e l'ES.2 si ha:

TEOREMA Sia f cont. su Ω . f ha una primitiva in Ω se e solo se $\int \gamma f = 0, \forall \gamma$ curva chiusa in Ω .

Oss. $\frac{1}{z}$ non ha primitiva in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.