

ESERCIZI

1. Dimostrare che $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right) = 1$

2. (i) Sia $a_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $a_{2n} = -\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ ($n \geq 1$).

Dimostrare che $\sum a_n = +\infty$, $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$ converge ad $x \in (1, +\infty)$.

(ii) Sia $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$. Dimostrare che $\sum a_n$ converge e $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n) = 0$ (non zero).

[Sugg. $(1+a_{2n-1})(1+a_{2n}) < 1 - \frac{1}{2n}$]

3. Sia $\log z$ il ramo principale del log definita su $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Dimostrare: (i) $zw \in D_1(1) \Rightarrow \log(zw) = \log z + \log w$.

(ii) $\operatorname{Im} z \in (-\pi, \pi) \Rightarrow \log e^z = z$.

(iii) Sia $a \in \mathbb{R}$ e $\Sigma_a := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \in (a-\pi, a+\pi)\}$. Dimostrare

che $z \in \Sigma_a \mapsto e^z$ è iniettiva con inversa $\log_{\Sigma_a} : \mathbb{C} \setminus P_a \rightarrow \Sigma_a$

con $P_a := \{te^{ia} \mid t \leq 0\}$ e $\log_{\Sigma_a}(e^{ia}) = a$.

4. Dimostrare che $\cos \pi z = \prod_{n \in \mathbb{Z}} \left(1 + \frac{z}{n+\frac{1}{2}}\right) e^{-\frac{z}{n+\frac{1}{2}}} = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n+1)^2}\right)$

5. Determinare il genere di $\cos \sqrt{z}$, $\frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$, $\sin z^2$.