

-1- Trasformazioni Lineari frale o mappe di Möbius.

DEF. $db = \{ f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \mid z, a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ e } ad-bc \neq 0 \}$

Oss. (i) $f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \Rightarrow f$ è conforme ovunque fuorché nei punti di denominatore

(che $z \in \mathbb{C}$ o $c=0$, $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ se $c \neq 0$)

(ii) $f'(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}$ e db .

(iii) db è un gruppo rispetto alle composizioni (infatti db è isomorfo a $GL(2, \mathbb{C})/\sim$ dove $A \sim B \Leftrightarrow A = \lambda B$ con $\lambda \neq 0$)

(iv) Estendiamo f a $\mathbb{C}^*$ ponendo $f(\infty) = \begin{cases} a/c, & \text{se } c \neq 0 \\ \infty, & \text{se } c = 0 \end{cases}$
e se $c \neq 0$ $f(-d/c) = \infty$.

Definiamo $T_\gamma z = z + \gamma$, $M_\alpha z = \alpha z$ e $Jz = 1/z$ ($\alpha, \gamma \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$)

Lemma 1 $f \in db \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta, \gamma$ ($\alpha \neq 0$) in $\mathbb{C}$ e $\sigma = 0, 1$ t.c. $f = T_\gamma \cdot M_\alpha \cdot J^\sigma \cdot T_\beta$.

Dim. Sia $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Se $c=0$, possiamo prendere $\sigma=0=\beta$, $\alpha = \frac{a}{d}$, $\gamma = \frac{b}{d}$.

Se $c \neq 0$, (dividendo f per c) possiamo assumere $c=1$. Prendiamo $\beta = -d$, $\sigma=1$

e $f = T_\gamma M_\alpha J^\sigma T_\beta \Leftrightarrow \frac{az+b}{z+d} = \frac{\gamma}{z+d} + \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = a \\ \alpha\gamma = b \end{cases} \Rightarrow \gamma = a, \alpha = b-ad. \square$

DEF. $\mathcal{C} = \{ \text{rette o cerchi in } \mathbb{C} \}$

Oss. L'equazione cartesiana di un elemento di $\mathcal{C}$ è

$$(*) \quad \sigma(x^2+y^2) - 2bx - 2cy = d \quad \text{con } \sigma=0,1, \quad b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma d + b^2 + c^2 > 0$$

($\sigma=0$ corrisponde a rette, $\sigma=1$ al cerchio di centro (b,c) e raggio $(d+b^2+c^2)^{1/2}$)

Proposizione 1 $f \in db \Rightarrow f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$.

Dim. Chiaramente $M_\alpha: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ ($\alpha \neq 0$) e $T_\gamma: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ (ES). Quindi, per il Lemma, basta dimostrare la tesi per $f(z) = 1/z = Jz$.

Sia $w = u+iv = \frac{1}{z} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$ e $u^2+v^2 = \frac{1}{x^2+y^2}$. Assumiamo che valga (A).

Moltiplicando (*) per u^2+v^2 si usano le relazioni $u = x(u^2+v^2)$ $v = -y(u^2+v^2)$ e si ha

$$(**) \quad \sigma - 2bu + 2cv = d(u^2+v^2). \quad \text{Se } d=0, (*) \text{ è l'equazione di una retta.}$$

Se $d \neq 0$ è l'equazione di un cerchio. $\square$

Proposizione 2 Dati 3 punti distinti $z_j \in \mathbb{C}^*$ $\exists!$ $F \in \text{db} \mid F: (z_1, z_2, z_3) \rightarrow (0, \infty, 1)$

Lemma 2 $f \in \text{db}$. Se f ha tre punti $z_j \in \mathbb{C}^*$ fissi distinti $\Rightarrow f(z) = z$.

Dim (i) Se uno dei punti, diciamo, $z_3 = \infty \Rightarrow f(z) = az + b$

e da $az + b = z_1$ e $a z_2 + b = z_2$ segue $a(z_2 - z_1) = z_2 - z_1 \Rightarrow a = 1$

$\Rightarrow b = 0$ (ii) Se $z_j \neq \infty, \forall j$, definiamo $g(z) = \frac{1}{z - z_1}$.

Allora $g(z) = \infty$ e i punti fissi di $g \circ f \circ g^{-1}$ sono $g(z_j)$.

Dal pto (i), segue che $g \circ f \circ g^{-1} = \text{id} \Rightarrow f = \text{id}$. $\square$

Dim (Proposizione 2) Unicità: se $F_k: (z_1, z_2, z_3) \rightarrow (0, \infty, 1)$ $k=1, 2$

$\Rightarrow F_1 \circ F_2^{-1}$ ha come pti fissi $z_j \xRightarrow{\text{lemma 2}} F_1 \circ F_2^{-1} = \text{id} \Rightarrow F_1 = F_2$.

$\exists!$ Se uno degli z_j è ∞ , diciamo $z_3 = \infty$, $\Rightarrow F(z) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$,

se $z_j \neq \infty, \forall j$: $F(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2} \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$. $\square$

Corollario Se $(z_1, z_2, z_3) \in (w_1, w_2, w_3)$ può trovasi 3 pti distinti

in $\mathbb{C}^*$ $\Rightarrow \exists!$ $f \in \text{db}$: $f(z_j) = w_j$.

Dim. Se $F_1: (z_1, z_2, z_3) \rightarrow (0, \infty, 1)$, $F_2: (w_1, w_2, w_3) \rightarrow (0, \infty, 1)$,

allora $f = F_2^{-1} \circ F_1$.

Se anche $g: (z_1, z_2, z_3) \rightarrow (w_1, w_2, w_3)$, ($g \in \text{db}$), allora

$f \circ g(z_j) = z_j \xRightarrow{\text{lemma 2}} f \circ g = \text{id} \Leftrightarrow g = f$. $\square$