DEFINIZIONE (Singolarità isolate) Sia Ω una regione in $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$, $\Omega' := \Omega \setminus \{z_0\}$ e $f \in H(\Omega')$ ($\overset{def}{\Leftrightarrow}$ f olomorfa in Ω').
Diremo che z_0 è una singolarità isolata di del seguente tipo:

(i) eliminabile se $\exists\, r>0 \mid D_r' := \{0<|z-z_0|<r\} \subseteq \Omega$ e $\sup_{D_r'} |f| < +\infty$;

(ii) z_0 è un polo se $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ ($\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\, M>0\ \exists\, r \mid |f(z)| \geq M,\ \forall z \in D_r'$)

(iii) z_0 è una singolarità essenziale in tutti gli altri casi.

Esempi (i) 0 è una singolarità eliminabile per $f(z) = z$ su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
(ii) 0 è un polo per $f(z) = \frac{1}{z^n}$ con $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
(iii) 0 è una singolarità essenziale per $f(z) = e^{1/z}$ su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

cfr. Theorem 3.1 (Riemann)

Proposizione Se $z_0 \in \Omega$ è una singolarità eliminabile per $f \in H(\Omega')$ con $\Omega' := \Omega \setminus \{z_0\}$, allora $\exists \lim_{z\to z_0} f(z) = \alpha \in \mathbb{C}$ e la funzione f estesa per continuità su Ω è olomorfa su Ω.

Dim. Sia
$$g(z) := \begin{cases} (z-z_0)^2 f(z), & \forall\, z \in \Omega' \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$$

Allora (ovviamente) $g \in H(\Omega')$ ed inoltre
$$g'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z) = 0$$
essendo f limitata vicino a z_0 per ipotesi. Dunque $g \in H(\Omega)$ e per analiticità
$$g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{per } |z-z_0|<r$$
con r opportuno (N.B. $g(z_0) = 0 = g'(z_0)$: per questo la serie "comincia" da $n=2$). Ossia $g(z) = (z-z_0)^2 \tilde{g}(z)$ con $\tilde{g}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2+k}(z-z_0)^k$ olomorfa su $|z-z_0|<r$. Quindi $\tilde{g}(z) = f(z)$ su $0<|z-z_0|<r$ e $\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \tilde{g}(z) = a_2 =: \alpha \in \mathbb{C}$ e $\tilde{g}$ è l'estensione olomorfa di f a $\{|z-z_0|<r\}$. ☒

OSS. 1 Se definiamo $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, le singolarità eliminabili e i poli sono quelle per cui $\exists \lim_{z\to z_0} f(z) = \alpha \in \mathbb{C}^*$ e le singolarità essenziali sono quelle per cui il $\lim_{z\to z_0} f(z) \nexists$ in $\mathbb{C}^*$.

cfr. Coroll. 3.2

OSS. 2 Se f ha un polo in $z_0 \Rightarrow |f| \geq 1$ vicino a $z_0 \Rightarrow \frac{1}{f}$ è limitata e olomorfa vicino a $z_0 \Rightarrow z_0$ è una singolarità eliminabile per $\frac{1}{f}$ in particolare $\lim_{z\to z_0} \frac{1}{f} = 0$ e $g = \frac{1}{f}$ vicino a z_0 e $g(z_0) = 0$ è olomorfa in un intorno di z_0.