

③ Chiamiamo $\gamma = \gamma_{s_1}$ e $\hat{\gamma} = \gamma_{s_2}$. Sappiamo che $|\gamma(t) - \hat{\gamma}(t)| < \varepsilon$
 $\forall t \in [a, b]$

In generale, data una curva C' a tratti $\gamma = \gamma(t), t \in [a, b]$
 e due punti $z_1 = \gamma(t_1)$ e $z_2 = \gamma(t_2)$, denotiamo

$$l(\gamma; z_1, z_2) = \text{lunghezza di } \gamma \text{ tra } z_1 \text{ e } z_2 := \left| \int_{t_1}^{t_2} |\gamma'(t)| dt \right|.$$

Ora, siano $z_0 = \alpha, z_1, \dots, z_{n+1} = \beta$ t.c. $z_i = \gamma(t_i)$

$$t_0 = a < t_1 < \dots < t_{n+1} = b \text{ e } l(\gamma; z_i, z_{i+1}) \leq \varepsilon/2, \forall 0 \leq i \leq n$$

poiché $l(\gamma) < +\infty$ è chiaro che si può fare:

$$(p.e. l(\gamma; z_i, z_{i+1}) = \varepsilon/2 \text{ per } i < n-1 \text{ e } l(\gamma; z_n, z_{n+1}) \leq \varepsilon/2)$$

$$\text{Sia } D_i = D_{2\varepsilon}(z_i) \quad 0 \leq i \leq n$$

$$\left(\text{p.b. } |z_{i+1} - z_i| = \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t) dt \right| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\gamma'(t)| dt = l(\gamma; z_i, z_{i+1}) \right)$$

Allora $z_i, z_{i+1} \in D_i$ (essendo $|z_{i+1} - z_i| \leq \varepsilon/2 < 2\varepsilon$)

Inoltre, $\forall t_i \leq t \leq t_{i+1} \quad \gamma(t), \hat{\gamma}(t) \in D_i$

$$\left[|\gamma(t) - z_i| \leq l(\gamma; z_i, \gamma(t)) \leq \varepsilon/2 \text{ per costruzione.} \right]$$

$$\text{e } |\hat{\gamma}(t) - z_i| \leq |\hat{\gamma}(t) - \gamma(t)| + |\gamma(t) - \gamma(t_i)| < \varepsilon + \varepsilon/2 < 2\varepsilon$$

Quindi $\bigcup_{i=0}^n D_i$ ricopre γ e $\hat{\gamma}$ e $z_i, z_{i+1}, w_i, w_{i+1} \in D_i$
 $\forall 0 \leq i \leq n$

