SERIE DI WEIERSTRASS-LAURENT ("serie di Laurent")

Consideriamo la funzione $f(z) = \frac{e^z + e^{\frac{1}{z}}}{2}$ su $\Omega = \{z \neq 0\}$

$f \in H(\Omega)$ ed inoltre $f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k$ con $a_k = \frac{1}{|k|!}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k := \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} c_k + \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} c_{-k}\right)$

In generale, questo tipo di serie (dette serie di Laurent) si associano a funzioni analitiche in un anello $\{r<|z-z_0|<R\}$.

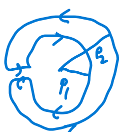
Teorema di Weierstrass-Laurent Sia $f\in H(\Omega)$ con $\Omega = \{z\in\mathbb{C} \mid r<|z|<R\}$ con $0\le r<R$. Allora, si ha $f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k (z-z_0)^k$ dove

$$(*) \quad a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}}\, d\xi \quad \text{dove } r<\rho<R.$$

Oss. (i) Chiaramente, ponendo $z' = z - z_0$ ci si riconduce immediatamente al caso $z_0 = 0$. Da ora in poi quindi considereremo solo il caso $z_0=0$.

(ii) Il valore di a_k non dipende da $\rho\in(r,R)$: infatti, il dominio $\Omega' = \{r<|z|<R\}\setminus(-\infty,0)$

è semplicemente connesso, e se $r<\rho_1<\rho_2<R$, per il teorema di Cauchy, l'integrale di $\frac{f(\xi)}{\xi^{k+1}}$ sul cammino chiuso Γ_ε:



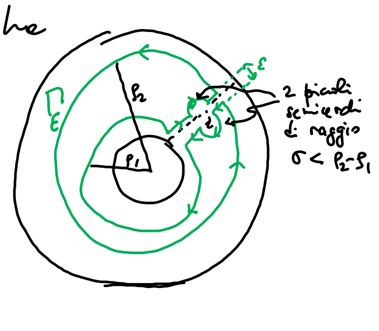
è nullo e mandando $\varepsilon\to 0$ si ottiene quanto affermato.

Dim del Teorema Si fissino $z\in\Omega'$ e $r<\rho_1<|z|<\rho_2<R$.

Il dominio $\Omega' = \Omega\setminus\{tz \mid 0<t<\infty\}$ è semplicemente connesso quindi, per il teorema di Cauchy, si ha

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z}$$

dove Γ_ε:



Mandando $\varepsilon \to 0$, si ottiene

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=\rho_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} - \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=\rho_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi - z| = \sigma} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi .$$

Il terzo integrale, per la formula di Cauchy, vale $-f(z)$ e dunque otteniamo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=\rho_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} - \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=\rho_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} =: f_2(z) + f_1(z).$$

Ora, come nella dimostrazione dell'analiticità di funzioni olomorfe (Cauchy, usando $\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi}\frac{1}{1-\frac{z}{\xi}} = \frac{1}{\xi}\sum_{k\geq 0}\left(\frac{z}{\xi}\right)^k$ e scambiando la serie con l'integrale) si ha che $f_2(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$ con a_k come in $(*)$ (con $z_0 = 0$), si noti che nel primo integrale (definizione di f_2) $|z| < \rho_2 = |\xi|$, mentre nel secondo integrale (che definisce f_1) $|z| > \rho_1 = |\xi|$. Quindi,

$$f_1(z) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=\rho_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z}\oint_{|\xi|=\rho_1} \frac{f(\xi)}{\frac{\xi}{z} - 1} = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z}\oint_{|\xi|=\rho_1} \frac{f(\xi)}{1 - \frac{\xi}{z}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}\oint_{|\xi|=\rho_1} f(\xi)\,\xi^n = \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k z^k \quad \text{con } a_k \text{ come in } (*). \blacksquare$$

<u>Oss.</u> $f_2 \in H(D_R(0))$, $f_1 \in H(\{|z| > r\})$ con singolarità eliminabile in $z = \infty$.