

Angoli

Definiamo su $\mathbb{R}$ la seguente **relazione d'equivalenza**:

$$x \sim y \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid x - y = 2\pi k, \quad (1)$$

e denotiamo con $[x]$ o con $\tilde{x}$ la classe d'equivalenza indotta da x :

$$[x] := \tilde{x} := x + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Denotiamo anche con S^1 l'insieme delle classi d'equivalenza indotte da $\sim$:

$$S^1 := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) = \{\alpha = [x] \mid x \in \mathbb{R}\}. \quad (2)$$

Introduciamo, ora, una metrica su S^1 ponendo

$$d(\alpha, \beta) := \inf_{k \in \mathbb{Z}} |x - y - 2\pi k|, \quad x \in \alpha, y \in \beta. \quad (3)$$

Es 1 (i) Dimostrare che tale definizione è ben posta, ossia, non dipende dai rappresentanti di α e β .

(ii) Dimostrare che (S^1, d) è uno spazio metrico completo

Sia $\mathbb{S}^1 = \{e^{it} \mid t \in \mathbb{R}\} := \partial\mathbb{D}$ il bordo del disco unitario in $\mathbb{C}$.

Es 2 (i) Dimostrare che $(\mathbb{S}^1, d_0)$ è uno spazio metrico completo, dove $d_0(z, w) = |z - w|$ (per $z, w \in \mathbb{S}^1$).

(ii) Dimostrare che (S^1, d) e $(\mathbb{S}^1, d_0)$ sono isomorfi come spazi metrici.