

La formula generalizzata di Cauchy

Lemma Sia $K \subseteq \mathbb{C}$ compatto e sia $F : (h, t) \in K \times [a, b] \rightarrow F(h, t) \in \mathbb{C}$ continua. Allora, la funzione

$$f(h) := \int_a^b F(h, t) dt \quad (1)$$

è continua su K e quindi

$$\lim_{h \rightarrow h_0} \int_a^b F(h, t) dt = \int_a^b F(h_0, t) dt, \quad \forall h_0 \in K. \quad (2)$$

La dimostrazione segue facilmente da Heine–Cantor, che implica che F è uniformemente continua su $K \times [a, b]$.

Come applicazione dimostriamo il seguente fondamentale

Teorema Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un insieme aperto e $f \in H(\Omega)$. Allora f è derivabile un numero arbitrario di volte su Ω e vale la seguente “formula generalizzata di Cauchy”

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad \forall z \in D, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad (C_n)$$

dove D è un qualunque disco aperto la cui chiusura è contenuta in Ω e C^+ è la sua frontiera orientata positivamente.

Dimostrazione Sia $D = D_R(z_0)$ e dimostriamo (C_n) per induzione su $n \geq 0$. (C_0) è la formula di Cauchy. Assumiamo (C_{n-1}) , con $n \geq 1$, e dimostriamo (C_n) . Da (C_{n-1}) segue che

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(z+h) - f^{(n-1)}(z)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{C^+} f(\zeta) \frac{(\zeta - z)^n - (\zeta - z - h)^n}{h} \frac{1}{(\zeta - z - h)^n (\zeta - z)^n} d\zeta. \end{aligned} \quad (3)$$

Ricordando la formula per la differenza di potenze, si ha che

$$\begin{aligned} \frac{(\zeta - z)^n - (\zeta - z - h)^n}{h} &= \sum_{j=0}^{n-1} (\zeta - z)^j (\zeta - z - h)^{n-1-j} \\ &=: g(\zeta, h) \rightarrow n(\zeta - z)^{n-1}, \text{ per } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Se $0 < \delta < R - |z - z_0|$ e $z(t) = z_0 + Re^{it}$, la tesi segue dal Lemma e la (2) con $a = 0$, $b = 2\pi$, $K = \{h \in \mathbb{C} \mid |h| \leq \delta\}$, $h_0 = 0$ e

$$F(h, t) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \cdot f(z(t)) \cdot \frac{g(z(t), h)}{(z(t) - z - h)^n (z(t) - z)^n} \cdot z'(t). \quad \blacksquare$$