

Numeri complessi

Il campo complesso $\mathbb{C}$

L'equazione

$$x^2 + 1 = 0 \quad (1)$$

non ha soluzioni reali x (essendo $x^2 \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$). I numeri complessi nascono dall'esigenza di voler "risolvere" (ossia, voler trovare soluzioni) di *qualunque* equazione polinomiale ed in particolare, quindi, dell'equazione (1). È naturale, allora, introdurre un simbolo i , chiamato *unità immaginaria*, con la proprietà che moltiplicato per se stesso coincide con -1 :

$$i^2 = i \cdot i = -1, \quad (2)$$

(che sarà quindi soluzione dell'equazione (1)). Dopodiché, essendo le equazioni polinomiali equazioni algebriche che coinvolgono moltiplicazioni e addizioni è naturale *formare combinazioni lineari* di numeri reali con l'unità immaginaria e formare così *numeri complessi*¹

$$z = x + iy, \quad \text{con } x, y \in \mathbb{R}; \quad (3)$$

la moltiplicazione di un numero reale con il simbolo i è "commutativa" (ossia $iy = yi$ per ogni $y \in \mathbb{R}$) e $i0 = 0$. L'addizione e la moltiplicazione si definiranno nel modo naturale, tenendo conto della relazione fondamentale (2), ossia, se $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ sono due numeri complessi (x_j e y_j numeri reali), si porrà:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \quad (4)$$

e per la moltiplicazione

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + x_1iy_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \end{aligned} \quad (5)$$

Spesso, come fatto per il prodotto reale, si omette il punto e si denota semplicemente $z_1 \cdot z_2$ con z_1z_2 . Da queste definizioni segue che:

- (i) *l'addizione e la moltiplicazione di numeri complessi sono operazioni binarie commutative e associative;*
- (ii) $0 = 0 + i0$ è l'elemento neutro rispetto alla somma² e l'opposto di $z = x + iy$ è $-z = -x + i(-y)$;
- (iii) 1 è l'elemento neutro rispetto al prodotto³;
- (iv) *vale la proprietà distributiva*⁴;
- (v) *ogni numero complesso z diverso da zero ha un reciproco z^{-1} tale che $z \cdot z^{-1} = 1$.*

¹Questa "definizione" di numeri complessi può non essere soddisfacente dal punto di vista formale: a fine sezione ne daremo una definizione rigorosa (ma meno intuitiva).

²Cioè, $z + 0 = z$ per ogni numero complesso z .

³Cioè, $z \cdot 1 = z$ per ogni numero complesso z .

⁴ $w \cdot (z_1 + z_2) = w \cdot z_1 + w \cdot z_2$ comunque presi w, z_1, z_2 numeri complessi (come è immediato verificare).

Mentre (i) ÷ (iv) si verificano immediatamente, l'esistenza del reciproco (v) ha bisogno di una breve discussione. Diamo alcune utili definizioni. Dato un numero complesso z come in (3), x si chiama *parte reale* di z e y *parte immaginaria* di⁵ z e si denota:

$$x = \operatorname{Re}(z), \quad y = \operatorname{Im}(z), \quad (z = x + iy); \quad (6)$$

$\bar{z}$ denota il *complesso coniugato* di z , ossia il numero complesso

$$\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy; \quad (7)$$

infine, il numero reale non negativo $|z|$ denota il *modulo del numero complesso* z :

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (8)$$

Si noti che

$$|z|^2 = z \bar{z}. \quad (9)$$

Si noti anche che $z = 0$ se e solo se $x = 0 = y$ e questo, a sua volta è equivalente a $|z| = 0$ e quindi (come per $\mathbb{R}$) *un numero complesso è 0 se e solo se il suo modulo è 0*. Inoltre, dalla definizione di complesso coniugato seguono immediatamente le relazioni

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \quad (10)$$

Ora, se z è un numero complesso non nullo (ossia tale che $|z| > 0$), si ha che il numero complesso definito come

$$z^{-1} := \frac{\bar{z}}{|z|^2} := \bar{z} \cdot |z|^{-2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad (11)$$

soddisfa, grazie a (9), la relazione⁶

$$z z^{-1} = z^{-1} z = 1, \quad (12)$$

e verrà quindi chiamato il⁷ *reciproco* di $z \neq 0$.

Riassumendo, *i numeri complessi con le operazioni sopra introdotte formano un campo che verrà denotato con $\mathbb{C}$* : in altri termini, i numeri complessi verificano l'analogo dei primi nove assiomi dei numeri reali, che in algebra sono, appunto, chiamati gli assiomi di campo.

Disuguaglianza triangolare

Anche per il modulo complesso vale la *disuguaglianza triangolare*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}; \quad (13)$$

infatti, tale disuguaglianza segue immediatamente dal seguente⁸

⁵Attenzione: la parte immaginaria di un numero complesso è dunque un numero reale!

⁶Ad esempio, $|1 + i| = \sqrt{2}$ e $\frac{3-2i}{1+i} := (3-2i)(1+i)^{-1} = (3-2i) \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - i \frac{5}{2} = \frac{1}{2} + i \left(-\frac{5}{2}\right)$.

⁷È immediato verificare che se $zw = 1$ allora $w = z^{-1}$.

⁸La (13), per definizione di modulo complesso, è esattamente la (15).

Lemma 1 Siano $x_i, y_i, i = 1, 2$, numeri reali. Allora⁹

$$|x_1x_2 + y_1y_2| \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}, \quad (14)$$

$$\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}. \quad (15)$$

Dimostrazione Elevando al quadrato ed eliminando i termini comuni, si vede che la (14) è equivalente a

$$2x_1x_2y_1y_2 \leq x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2,$$

relazione, a sua volta, equivalente a $(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geq 0$, che è sempre verificata.

Elevando al quadrato la relazione (15), svolgendo i quadrati dei binomi e semplificando si vede che (15) è equivalente a (14). ■

Definizione assiomatica di $\mathbb{C}$

Chiudiamo questa breve introduzione ai numeri complessi con la definizione assiomatica di $\mathbb{C}$ che fa esclusivo riferimento agli assiomi dei numeri reali. L'idea è che i numeri complessi $z = x + iy$ sono identificati dai due numeri reali x e y che ne sono, rispettivamente, la parte reale e la parte immaginaria. Identificando quindi i numeri complessi $z = x + iy$ con la coppia $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ possiamo (ri)dare una definizione formale del campo complesso $\mathbb{C}$:

Definizione 2 Il campo complesso $\mathbb{C}$ è l'insieme $\mathbb{R}^2$ equipaggiato con due operazioni binarie, “+” e “*”, dette rispettivamente ‘somma e prodotto complesso’, definite come segue:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad (\text{SC})$$

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) \quad (\text{PC})$$

Naturalmente questa definizione è consistente con (3), (4) e (5). Osserviamo che l'elemento neutro della somma è¹⁰ $0 := (0, 0)$ e l'elemento neutro del prodotto è $1 := (1, 0)$; l'opposto di (x, y) è $(-x, -y) =: -(x, y)$ e il reciproco di $(x, y) \neq 0 = (0, 0)$ è dato (come si ri-verifica immediatamente) da $(x, y)^{-1} := \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$. Osserviamo anche che

$$(0, 1) * (0, 1) \stackrel{(\text{PC})}{=} (-1, 0) = -(1, 0) = -1;$$

e dunque se poniamo $i := (0, 1)$ otteniamo la relazione fondamentale (2), mostrando che, in questo approccio l'unità immaginaria i non è altro che il numero complesso $(0, 1)$. Se, poi, identifichiamo i numeri reali $x \in \mathbb{R}$ con i numeri complessi $(x, 0)$ ritroviamo la formula (3) che però adesso ha la seguente interpretazione:

$$z := (x, y) = (x, 0) * (1, 0) + (0, 1)(y, 0) =: x * 1 + i * y$$

ossia, omettendo nuovamente il simbolo di moltiplicazione complessa ‘*’, $z = x + iy$.

⁹La (14) si chiama *disuguaglianza di Cauchy*; la disuguaglianza (15) si chiama *disuguaglianza triangolare*.

¹⁰In questa definizione il simbolo 0 ha due diversi significati: a sinistra è (per definizione) l'elemento neutro in $\mathbb{C}$ della somma complessa e tale elemento neutro è dato dalla coppia $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ (dove lo 0 è l'elemento neutro della somma in $\mathbb{R}$).

Osservazione 3 Il campo $\mathbb{C}$, a differenza del campo $\mathbb{R}$, è *algebricamente chiuso*, ossia, ogni polinomio (a coefficienti complessi) ha almeno uno zero in $\mathbb{C}$. Forse sorprendentemente, le dimostrazioni più semplici di questa affermazione non sono puramente algebriche, ma usano l'assioma di completezza di Dedekind: nel capitolo finale (§), daremo una dimostrazione classica di questo fondamentale risultato, noto, appunto, come il *teorema fondamentale dell'algebra*.

Esercizi

Esercizio 1► Calcolare parte reale e parte immaginaria dei seguenti numeri complessi:

$(2 + 3i)^3$; $1/(\sqrt{2} - 2i)$; $(1 - i)/(1 + i)$; i^n ($n \in \mathbb{N}$).

Esercizio 2 (i) Verificare che la formula del binomio di Newton, insieme alla sua dimostrazione, si estende ad a e b in $\mathbb{C}$.

(ii) Verificare che la formula della somma geometrica, insieme alla sua dimostrazione, si estende a $\mathbb{C}$.

Esercizio 3 Sia $a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$, con $a_i \in \mathbb{C}$ e $a_n \neq 0$, un polinomio complesso nella variabile $z \in \mathbb{C}$ di grado n . Dimostrare che se $P(z_0) = 0$ per un qualche $z_0 \in \mathbb{C}$, allora $P(z) = (z - z_0)Q(z)$ con Q polinomio di grado $n - 1$.

[Suggerimento: Porre $\tilde{P}(w) := P(z_0 + w)$ con w nuova variabile complessa e osservare che $\tilde{P}(0) = 0$, il che vuol dire che $\tilde{P}$ non ha termine noto...]

Esercizio 4* Sia dato $w = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). Trovare le soluzioni di $z^2 = w$.

[Suggerimento: Se $z = x + iy$, $z^2 = w \iff x^2 - y^2 = \alpha$ & $2xy = \beta$. Si deve dunque discutere questo sistema nelle incognite x, y al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.]

Esercizio 5 Sia $P(z) = az^2 + bz + c$ un polinomio di grado 2 ($a \neq 0$) a coefficienti complessi (ossia, $a, b, c \in \mathbb{C}$). Dimostrare che esiste sempre z_0 tale che $P(z_0) = 0$ e che se $b^2 \neq 4ac$ vi sono esattamente due soluzioni di $P(z) = 0$ e, in tal caso, determinare le due soluzioni.

[Suggerimento: Si "completi il quadrato" e si usi l'esercizio precedente.]

Funzioni complesse di variabile reale

Definizione 4 Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ e sia f una funzione da E in $\mathbb{C}$, ossia, $f : x \in E \rightarrow f(x) = u(x) + iv(x) \in \mathbb{C}$, dove $u(x) = \operatorname{Re} f(x)$ e $v(x) = \operatorname{Im} f(x)$. Diremo che:

- (i) f continua in $x_0 \in E \iff u$ e v sono continue in x_0 ; $f \in C(E) = C(E, \mathbb{C}) \iff u, v \in C(E)$;
- (ii) f derivabile in $x_0 \iff u$ e v sono derivabili in x_0 ; in tal caso poniamo $f'(x_0) := Df(x_0) := u'(x_0) + iv'(x_0)$; analogamente per le derivate di ordine superiore;
- (iii) se E è un intervallo, diremo che f è Riemann-integrabile su E , $f \in \mathcal{R}(E) := \mathcal{R}(E, \mathbb{C}) \iff u, v \in \mathcal{R}(E)$; in tal caso poniamo

$$\int_E f(x)dx = \int_E u(x)dx + i \int_E v(x)dx$$

(analogamente per gli integrali con estremi a e b in E e per integrali impropri nel caso E o $|f|$ non siano limitati).

Esempio 5 (Formula di Eulero) Per $t \in \mathbb{R}$ poniamo

$$e^{it} := \cos t + i \sin t, \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (16)$$

Questa è la meravigliosa formula di Eulero¹¹. Si osservi che da (16) segue immediatamente che

$$\overline{e^{it}} = e^{-it}, \quad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}, \quad De^{it} = ie^{it}. \quad (17)$$

Dalle formule di addizione delle funzioni trigonometriche e dall'algebra dei numeri complessi, segue subito che

$$e^{i(s+t)} = e^{is} \cdot e^{it}, \quad (18)$$

che porta immediatamente alla formula di de Moivre¹²

$$(e^{ix})^n = e^{inx}, \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}). \quad (19)$$

Se $z = x + iy$, poniamo, poi

$$e^z = e^{x+iy} := e^x e^{iy}. \quad (20)$$

È immediato verificare che anche in questo caso si ha

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w, \quad De^{zt} = ze^{it}, \quad \forall z, w \in \mathbb{C}. \quad (21)$$

La Definizione 4 permette di estendere a funzioni complesse vari risultati relativi alle funzioni reali; ad esempio, se $f = u + iv \in \mathcal{R}(E, \mathbb{C})$, E intervallo di $\mathbb{R}$, ed f ha una primitiva, ossia, esiste $F = U + iV$ derivabile tale che $F' = f$, allora vale il teorema fondamentale del calcolo: per ogni $a, b \in E$,

$$\int_a^b f = \int_a^b F' := \int_a^b U' + i \int_a^b V' = [U]_a^b + i[V]_a^b = F(b) - F(a).$$

In particolare, se $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} = \int_0^{2\pi} D \frac{e^{inx}}{in} dx = \left[\frac{e^{inx}}{in} \right]_0^{2\pi} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (22)$$

Rappresentazione polare dei numeri complessi

Dalla definizione di seno e coseno segue che la mappa

$$t \in [0, 2\pi) \mapsto e^{it} = \cos t + i \sin t \in S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\},$$

è biunivoca (iniettiva e suriettiva) e il punto e^{it} “percorre in senso antiorario” il cerchio S^1 partendo dal punto $z = 1$.

¹¹https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%27s_formula

¹²https://en.wikipedia.org/wiki/De_Moivre%27s_formula

Se $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $r := |z| > 0$, il numero complesso $w = z/|z|$ ha modulo 1, il che significa che $w \in S^1$ e, dunque, *esiste un unico $t \in [0, 2\pi)$ tale che $\cos t + i \sin t = w$* . Quindi, ogni numero complesso $z \neq 0$ ha un'unica rappresentazione “polare” della forma¹³

$$z = re^{it} = r \cos t + ir \sin t, \quad r > 0, t \in [0, 2\pi). \quad (23)$$

La mappa

$$\varphi : (r, t) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow re^{it} = r \cos t + ir \sin t \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad (24)$$

è biunivoca; esplicitamente la mappa inversa φ^{-1} è data da

$$\varphi^{-1} : z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mapsto (r, t) = (|z|, \tau_x + \text{Arccos } |x||z|^{-1}) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi), \quad (25)$$

con¹⁴ $\tau_x = 0$, se $x, y \geq 0$; $\tau_x = \frac{\pi}{2}$ se $x < 0 \leq y$; $\tau_x = \pi$ se $x \leq 0$ e $y < 0$; $\tau_x = \frac{3}{2}\pi$ se $y < 0 < x$.

Esercizi

Esercizio 6 Dimostrare che la rappresentazione polare (23) rimane unica se $t \in I$ dove I è un qualunque intervallo fissato lungo 2π con uno solo degli estremi incluso.

Esercizio 7 Dimostrare che la mappa inversa di φ in (24) è data da φ^{-1} in (25).

La topologia (standard) di $\mathbb{C}$

Definizione 6 Per $n \in \mathbb{N}_0$, siano $z_n = x_n + iy_n$ numeri complessi.

- (i) Un **intorno di** $z_0 \in \mathbb{C}$ è un “disco aperto” $D_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ con¹⁵ $r > 0$;
- (ii) Diremo che la **successione** $\{z_n\}$ **tende a** z_0 , in formule, $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z_0$, o anche $z_n \rightarrow z_0$, se $|z_n - z_0| \rightarrow 0$.
- (iii) Gli **aperti** di $\mathbb{C}$ sono o l'insieme vuoto o gli insiemi A tali che ogni punto $z_0 \in A$ è interno ad A , ossia, esiste un disco $D_r(z_0) \subseteq A$; i **chiusi** sono i complementari degli aperti.

Osservazione 7 Dalla disuguaglianza

$$\max\{|x|, |y|\} \leq |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{2} \max\{|x|, |y|\}, \quad (z = x + iy \in \mathbb{C}), \quad (26)$$

segue immediatamente che $z_n := x_n + iy_n \rightarrow z_0 := x_0 + iy_0$ se e solo se $x_n \rightarrow x_0$ e $y_n \rightarrow y_0$.

¹³È facile vedere che tale rappresentazione rimane unica se $t \in I$ dove I è un qualunque intervallo fissato lungo 2π con uno solo degli estremi incluso (Esercizio 6).

¹⁴Esercizio 7.

¹⁵Se $r = +\infty$, $D_r(z_0) = \mathbb{C}$.

Molte delle dimostrazioni date per la topologia standard in $\mathbb{R}$ si estendono immediatamente a $\mathbb{C}$ se si sostituisce agli intervalli aperti i dischi aperti di $\mathbb{C}$: In particolare, si ha che:

Proposizione 8 *Un insieme $C \subseteq \mathbb{C}$ è chiuso se e solo se comunque presa una successione $\{z_n\}$ in C convergente si ha che $\lim z_n \in C$.*

Anche la compattezza si estende in modo ovvio: un insieme $K \subseteq \mathbb{C}$ si dice **compatto** se per ogni successione $\{z_j\}$ in K esiste una sottosuccessione $\{z_{j_k}\}$ con limite in K . Naturalmente, vale il Teorema di Bolzano–Weierstrass:

Teorema 9 *Un insieme $K \subseteq \mathbb{C}$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

A titolo esemplificativo dimostriamo che se K è chiuso e limitato, allora K è compatto: sia $\{z_j\}$ una successione in K e sia $x_j = \operatorname{Re} z_j$, $y_j = \operatorname{Im} z_j$. Poiché K è limitato esistono $a < b$ e $c < d$ tali che $K \subseteq [a, b] \times [c, d]$ (identificando $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$). Quindi $a \leq x_j \leq b$ e $c \leq y_j \leq d$. Dunque, per il Teorema di Bolzano–Weierstrass in $\mathbb{R}$, esiste $x_{j_n} \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$ e, analogamente, esiste $y_{j_{n_k}} \rightarrow y_0 \in \mathbb{R}$. Allora $z_{j_{n_k}} \rightarrow z_0 := x_0 + iy_0$. Poiché K è chiuso, per la Proposizione 8, $z_0 \in K$. ■

Anche la continuità si estende in modo ovvio o tramite definizione “con ε e δ ” o tramite le successioni (tenendo a mente che grazie al teorema ponte le due definizioni sono equivalenti). Diremo, dunque, che $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ **[o anche, $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$] è continua** se comunque preso $z_0 \in A$ e una successione $\{z_j\}$ in A convergente a z_0 si ha che $f(z_j) \rightarrow f(z_0)$. Ad esempio, i polinomi (a coefficienti in $\mathbb{C}$) sono funzioni continue da $\mathbb{C}$

in $\mathbb{C}$: se $P = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ con $n \geq 1$ (per $n = 0$ l’affermazione è banalmente vera), allora

$$\begin{aligned} |P(z) - P(z_0)| &\leq \sum_{k=1}^n |a_k| |z^k - z_0^k| \\ &= |z - z_0| \sum_{k=1}^n |a_k| |z^{k-1} + z^{k-2}z_0 + \dots + z_0^{k-2}z + z_0^{k-1}|, \end{aligned}$$

da cui la continuità segue immediatamente.

Un altro teorema fondamentale che si generalizza immediatamente a funzioni da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{R}$ è il Teorema di Weierstrass:

Teorema 10 (Weierstrass) *Sia $K \subseteq \mathbb{C}$ compatto e $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora f assume massimo e minimo su K .*

Dimostrazione Basta dimostrare il caso del massimo. Sia $M = \sup\{f(z) | z \in K\}$; dalla definizione di estremo superiore segue l’esistenza di una successione $\{z_k\}$ in K tale che $f(z_k) \rightarrow M$. Per il Teorema di Bolzano–Weierstrass esiste $\{z_{k_j}\}$ in K tale che $z_{k_j} \rightarrow z_0 \in K$ e per continuità $f(z_{k_j}) \rightarrow f(z_0) = M$. ■

Teorema fondamentale dell'algebra

Teorema 11 Ogni polinomio di grado $n \in \mathbb{N}$ ha una radice in $\mathbb{C}$.

In altri termini, se $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ con $a_k \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$, allora esiste $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $P(z_0) = 0$.

Dimostrazione Chiaramente (sostituendo P con P/a_n) possiamo assumere che $a_n = 1$. Definiamo

$$m := \inf\{|P(z)| \mid z \in \mathbb{C}\} \in [0, +\infty), \quad r_0 := \max\{1, 2(|a_0| + \dots + |a_{n-1}|), \sqrt[n]{2m+2}\}. \quad (27)$$

Allora, se $|z| \geq r_0$, da (27) segue che

$$\begin{aligned} |P(z)| &= |z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0| \\ &\geq |z|^n \left(1 - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \dots - \frac{|a_0|}{|z|^n}\right) \\ &\geq |z|^n \left(1 - \frac{|a_{n-1}| + \dots + |a_0|}{|z|}\right) \\ &\geq \frac{|z|^n}{2} \geq m + 1. \end{aligned}$$

Da questa disuguaglianza segue che $\inf_{|z| \geq r_0} |P(z)| \geq m + 1$ e dunque

$$\inf_{|z| \leq r_0} |P(z)| = \inf_{\mathbb{C}} |P(z)| = m. \quad (28)$$

Per il Teorema di Weierstrass, l'estremo inferiore sul compatto $\{z \mid |z| \leq r_0\}$ della funzione continua $|P(z)|$ è un minimo, ossia

$$\exists z_0 \in \mathbb{C} \mid |z_0| \leq r_0, \quad \text{e} \quad |P(z_0)| \leq |P(z)| \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (29)$$

Dimostriamo che $P(z_0) = 0$. Supponiamo, per assurdo, che $P(z_0) \neq 0$. Definiamo il polinomio di grado n

$$Q(z) := \frac{P(z_0 + z)}{P(z_0)}. \quad (30)$$

Si noti che

$$Q(0) = 1; \quad |Q(z)| \geq 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad (31)$$

e che esiste $1 \leq k \leq n$ tale che

$$Q(z) = 1 + b_k z^k + \dots + b_n z^n, \quad b_k \neq 0, \quad b_n = \frac{1}{P(z_0)}. \quad (32)$$

Se definiamo $w := -|b_k|/b_k$, allora $|w| = 1$ ed esiste un unico $t_* \in [0, 2\pi)$ tale che $e^{it_*} = w$. Quindi se $t_0 := t_*/k$ si ha che

$$e^{ikt_0} = e^{it_*} = w = -\frac{|b_k|}{b_k}, \quad (33)$$

il che implica

$$b_k e^{ikt_0} = -|b_k|, \quad 1 + b_k r^k e^{ikt_0} = 1 - |b_k| r^k \in (0, 1), \quad \forall 0 < r < |b_k|^{-1/k}. \quad (34)$$

Quindi, nel caso $k = n$ si ha $|Q(re^{it_0})| = 1 - |b_k| r^k \in (0, 1)$ per ogni $0 < r < |b_k|^{-1/k}$, che contraddice (31). Se $k < n$, poniamo

$$r_1 := \min \left\{ 1, \frac{|b_k|}{2(|b_{k+1}| + \dots + |b_n|)}, |b_k|^{-1/k} \right\}, \quad (35)$$

allora, per ogni $0 < r < r_1$ si ha

$$\begin{aligned} |Q(re^{it_0})| &\stackrel{(32)}{=} \left| 1 + b_k r^k e^{ikt_0} + \dots + b_n r^n e^{int_0} \right| \\ &\stackrel{(34)}{=} \left| 1 - |b_k| r^k + \dots + b_n r^n e^{int_0} \right| \\ &\leq (1 - |b_k| r^k) + (|b_{k+1}| + \dots + |b_n|) r^{k+1} \\ &= 1 - r^k (|b_k| - r(|b_{k+1}| + \dots + |b_n|)) \\ &\stackrel{(35)}{\leq} 1 - r^k \frac{|b_k|}{2} < 1, \end{aligned}$$

il che contraddice nuovamente (31). ■