

Esercizio 1 Dimostrare le seguenti idenità:

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = 1, \quad (1)$$

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 0, \quad (2)$$

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = +\infty, \quad (3)$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right) = 1. \quad (4)$$

Esercizio 2 Dimostrare che, per ogni numero complesso z con $|z| < 1$, si ha

$$(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\cdots = \prod_{n=0}^{\infty} (1+z^{2^n}) = \frac{1}{1-z}. \quad (5)$$