Secondo Esonero – 15/1/2010

N.B. • *Indicare in cima all'elaborato da consegnare: nome, cognome, data di nascita, n. matricola (o n. documento).*
• *Il punteggio totale è in centesimi; il punteggio di ogni singolo esercizio è indicato tra parentesi quadrate.*
• *È* **vietato***: parlare, scambiarsi informazioni; consultare testi, appunti, etc.; l'uso del cellulare, calcolatrici, etc.* *Analisi Matematica I – CL Matematica (AA 2009/10 – L. Chierchia)*
• *Le risposte vanno sempre motivate chiaramente e sinteticamente!* **Risposte senza giustificazioni non danno punteggio**.

Es 1 [Pt. 30] Studiare la convergenza delle seguenti serie (al variare di $x \in \mathbb{R}$ qualora appaia):

$$(\mathbf{1.1}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 + \cos n} \qquad\qquad (\mathbf{1.2}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\cosh n}$$

$$(\mathbf{1.3}) \quad \sum_{n=4}^{\infty} \Big(\frac{(-1)^n}{\log(\log n)} + \frac{(\operatorname{sen} 1/n)^2}{\tanh 10^n} \Big)$$

Es 2 [Pt. 24] Calcolare i seguenti limiti:

$$(\mathbf{2.1}) \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}|x|}{\log(1+x^2)} \qquad (\mathbf{2.2}) \lim_{x\to+\infty} \Big(\log(\operatorname{senh} x)\Big) \tan\frac{1}{x}$$

$$(\mathbf{2.3}) \lim_{x\to 2+} \frac{x^2 + \{x\}}{[x]} \qquad (\mathbf{2.4}) \limsup_{n\to\infty} \Big(1 - \cos \pi n^2\Big)$$

(dove $[x]$ denota la parte intera di x e $\{x\} = x - [x]$ la parte frazionaria di x).

Es 3 [Pt. 16] (i) Studiare la continuità della seguente funzione

$$x \to f(x) := \begin{cases} \operatorname{sen}\dfrac{1}{n}, & \text{se } x = 1/n\ ,\ (n \in \mathbb{N}) \\ x^2, & \text{se } x \neq 1/n\ ,\ (n \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

(ii) Dare la definizione di uniforme continuità e dire se la funzione

$$x \to f(x) := \begin{cases} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

è uniformemente continua sugli insiemi $A := [-1, 1]$ e $B := [1, M]$, $C = (-\infty, M)$ con $M > 0$

Es 4 [Pt. 30] (i) Enunciare e dimostrare il teorema di Weierstrass sui massimi e minimi di funzioni continue.

(ii) Dimostrare che una successione è di Cauchy se e solo se è convergente.

Risposte
(1.1): converge se e solo se $|x| \leq 1$. **(1.2)**: converge se e solo se $|x| < e$. **(1.3)**: converge.
(2.1): $+\infty$. **(2.2)**: 1. **(2.3)**: 2. **(2.4)**: 2.
3,(i): f è continua su $\mathbb{R}\backslash\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$.
3,(ii): f è uniformemente continua su A, B e C.