

ESONERO 1

AM110 – CL Matematica (AA 2016/17 – L. Chierchia). 9/11/2016

- Indicare in cima all'elaborato: nome, cognome, data di nascita, n. matricola (o n. documento).
- Il punteggio totale è in centesimi; il punteggio di ogni singolo esercizio è indicato tra parentesi quadrate.
- È vietato: parlare, scambiarsi informazioni; consultare testi o appunti; l'uso del cellulare, calcolatrici, etc.
- Le risposte vanno sempre motivate chiaramente e sinteticamente! **Risposte senza giustificazioni non danno punteggio.**

Parte 1. Definizioni ed esempi (15 punti)

Es 1 [Pt. 3] Definire e dare la caratterizzazione di estremo superiore.
Dare un esempio in cui l'estremo superiore è $1/\sqrt{2}$ e non è un massimo.

Es 2 [Pt. 3] Definire gli intorni (“simmetrici”) di un punto $x_0 \in \mathbb{R}^*$.
Dare un esempio concreto (ossia con numeri, non con lettere) di un intorno di $-\infty$.

Es 3 [Pt. 3] Dare la definizione di punto di accumulazione.
Dare un esempio in cui $-\infty \in \mathcal{D}(A)$.

Es 4 [Pt. 3] Dare la definizione di $2^{-\sqrt{2}}$.

Es 5 [Pt. 3] Dare la definizione di \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} .

Parte 2. Svolgimento di esercizi assegnati (60 punti)

Es 6 [Pt. 6] Dare la definizione ricorsiva di x^n per $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ e dimostrare, per induzione su m che $x^{n+m} = x^n x^m$, per ogni $n, m \in \mathbb{N}$.

Es 7 [Pt. 8] Trovare l'insieme di numeri $x \in \mathbb{R}$ tali che $|x - 1| \leq x^2 - 3$.

Es 8 [Pt. 10] Trovare (motivando rigorosamente la risposta) estremo superiore e inferiore (specificando se si tratta di massimo o minimo) di $\left\{x = \frac{n^2}{n+3} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.

Es 9 [Pt. 8] Calcolare il $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1+x^2} - 1}{x}$.

Es 10 [Pt. 8] Calcolare il $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n!}$.

Es 11 [Pt. 8] Calcolare il $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$. [Usare, se occorre, i limiti notevoli].

Es 12 [Pt. 12] Dimostrare usando la definizione di limite che $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3\sqrt[n]{n} - 4n = -\infty$.

Parte 3. Esercizio originale (25 punti)

Es 13 [Pt. 25] Sia $E := \{t \in \mathbb{R} \mid 3^t < 1/2\}$.

- Dimostrare che $E \neq \emptyset$.
- Trovare un maggiorante per E .
- Sia $y := \sup E$. Tale numero è positivo o negativo? (motivare!).
- Dimostrare che¹ $3^y \geq 1/2$.
- Dimostrare che² $3^y \leq 1/2$ e concludere che $3^y = 1/2$.
- y è un numero razionale? (motivare!)

¹Si consiglia una dimostrazione “per assurdo”.

²Si consiglia una dimostrazione “per assurdo”.