

# ESONERO 1

AM110 – CL Matematica (AA 2016/17 – L. Chierchia). 9/11/2016

- Indicare in cima all'elaborato: nome, cognome, data di nascita, n. matricola (o n. documento).
- Il punteggio totale è in centesimi; il punteggio di ogni singolo esercizio è indicato tra parentesi quadrate.
- È vietato: parlare, scambiarsi informazioni; consultare testi o appunti; l'uso del cellulare, calcolatrici, etc.
- Le risposte vanno sempre motivate chiaramente e sinteticamente! **Risposte senza giustificazioni non danno punteggio.**

## Parte 1. Definizioni ed esempi (15 punti)

**Es 1 [Pt. 3]** Definire e dare la caratterizzazione di estremo superiore.  
Dare un esempio in cui l'estremo superiore è  $1/\sqrt{2}$  e non è un massimo.

**Es 2 [Pt. 3]** Definire gli intorni (“simmetrici”) di un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ .  
Dare un esempio concreto (ossia con numeri, non con lettere) di un intorno di  $-\infty$ .

**Es 3 [Pt. 3]** Dare la definizione di punto di accumulazione.  
Dare un esempio in cui  $-\infty \in \mathcal{D}(A)$ .

**Es 4 [Pt. 3]** Dare la definizione di  $2^{-\sqrt{2}}$ .

**Es 5 [Pt. 3]** Dare la definizione di  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ .

## Parte 2. Svolgimento di esercizi assegnati (60 punti)

**Es 6 [Pt. 6]** Dare la definizione ricorsiva di  $x^n$  per  $x \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$  e dimostrare, per induzione su  $m$  che  $x^{n+m} = x^n x^m$ , per ogni  $n, m \in \mathbb{N}$ .

**Es 7 [Pt. 8]** Trovare l'insieme di numeri  $x \in \mathbb{R}$  tali che  $|x - 1| \leq x^2 - 3$ .

**Es 8 [Pt. 10]** Trovare (motivando rigorosamente la risposta) estremo superiore e inferiore (specificando se si tratta di massimo o minimo) di  $\left\{x = \frac{n^2}{n+3} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ .

**Es 9 [Pt. 8]** Calcolare il  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1+x^2} - 1}{x}$ .

**Es 10 [Pt. 8]** Calcolare il  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n!}$ .

**Es 11 [Pt. 8]** Calcolare il  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$ . [Usare, se occorre, i limiti notevoli].

**Es 12 [Pt. 12]** Dimostrare usando la definizione di limite che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3\sqrt{n} - 4n = -\infty$ .

## Parte 3. Esercizio originale (25 punti)

**Es 13 [Pt. 25]** Sia  $E := \{t \in \mathbb{R} \mid 3^t < 1/2\}$ .

- Dimostrare che  $E \neq \emptyset$ .
- Trovare un maggiorante per  $E$ .
- Sia  $y := \sup E$ . Tale numero è positivo o negativo? (motivare!).
- Dimostrare che<sup>1</sup>  $3^y \geq 1/2$ .
- Dimostrare che<sup>2</sup>  $3^y \leq 1/2$  e concludere che  $3^y = 1/2$ .
- $y$  è un numero razionale? (motivare!)

<sup>1</sup>Si consiglia una dimostrazione “per assurdo”.

<sup>2</sup>Si consiglia una dimostrazione “per assurdo”.