ESONERO 2

AM110 – CL Matematica (AA 2016/17 – L. Chierchia). 9/1/2017

Parte 1. Definizioni ed esempi (20 punti)

Es 1 [Pt. 5] Definire π (in termini del coseno), spiegando brevemente perché la definizione è ben posta.

Es 2 [Pt. 5] Dare la definizione di continuità e di uniforme continuità. Dare un esempio di funzione continua su $(0,1)$ ma non ivi uniformemente continua.

Es 3 [Pt. 5] Definire massimo e minimo limite di una successione. Dare un esempio in cui $\liminf a_n < \limsup a_n$.

Es 4 [Pt. 5] Definire: intervallo aperto; insieme aperto; insieme chiuso. Dare esempi.

Parte 2. Svolgimento di esercizi assegnati (60 punti)

Es 6 [Pt. 10] Discutere la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\, n!}{n^n}$.

Es 7 [Pt. 15] Trovare i valori di x per cui converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log nx}{1+n^2x^2}$.

Es 8 [Pt. 15] Trovare i valori di x per cui converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log \sqrt[n]{1+\frac{x}{n}}$.

Es 9 [Pt. 10] Trovare massimo e minimo limite di $a_n = \arctan(-2)^n$.

Es 10 [Pt. 10] Trovare l'interno e i punti di frontiera dell'insieme $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}(2n-1,2n)$.

Parte 3. Esercizio originale [Pt 20+10+...]

Es 11 Sia E l'insieme delle $x \in \mathbb{R}$ per cui la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{\operatorname{sen}\left(x-\frac{1}{n}\right)}$.

(a) [Pt. 10] Determinare E (si faccia particolare attenzione al caso $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$). Si denoti con $f(x)$ il valore della serie per $x \in E$.
(b) [Pt. 5] Sia $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Si dimostri che esistono δ e N tale che $|\operatorname{sen}\left(x-\frac{1}{n}\right)| > \delta$ per ogni $n \geq N$. [Suggerimento: si usi un teorema noto.]

(c) [Pt. 5] Sia $x \neq k\pi$ e $\varepsilon > 0$. Dimostrare che esiste N t.c. $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} \left|\frac{e^{-n}}{\operatorname{sen}\left(x-\frac{1}{n}\right)}\right| < \varepsilon$.

(d) [Pt. 10] Dimostrare che f è continua in $[2,3]$.

Altre domande (solo se si sono svolti tutti gli esercizi precedenti): È vero che f è continua su E? È vero che f è uniformemente continua su E? È vero che f è uniformemente continua in $[2, 3.14)$?