

Programma del corso AM110 (a.a. 2016/17)

Per maggiori informazioni vedi

http://www.mat.uniroma3.it/users/chierchia/AM110_16_17/AM110_16_17.htm#diarielezioni

(1/1/2017)

- **Insiemistica elementare.** Prodotto cartesiano di due insiemi. Definizione di relazione, funzione, operazione binaria. Dominio e immagine (o "range"), funzioni iniettive, suriettive, biunivoche.
- **Gli assiomi dei numeri reali:** i primi quindici assiomi "algebrici"
- **I numeri naturali:** definizioni e proprietà elementari. Principio di induzione.
- **Il 16mo assioma dei numeri reali:** Assioma dell'estremo superiore. Caratterizzazione dell'estremo superiore. Proprietà archimedeo. Gli interi e i razionali. Densità dei razionali in \mathbf{R} .
- La funzione valore assoluto. Disuguaglianza di Bernoulli. Fattoriali coefficienti binomiali e formula del binomio di Newton. Definizione ricorsiva di x^n (n naturale) e di sommatoria. Enunciato del teorema di ricorrenza. Formula per la somma geometrica e per la differenza di due potenze ennesime (equivalenza delle due formule). Definizione di x^n con n intero [$x^0 := 1$, $x^n := 1/x^{-n}$ per $n < 0$].
- Teorema sulla esistenza ed unicità della radice ennesima di un numero positivo.
- Definizione di **intervallo**: $I \subseteq \mathbf{R}$ è un intervallo se per ogni $x < y$ con $x, y \in I$, si ha che $\{t \mid x < t < y\} \subseteq I$. (l'insieme vuoto è un intervallo). Lista e notazione dei vari tipi di intervalli.
- Definizione di **retta estesa** \mathbf{R}^* . Definizione di intorni; punti di accumulazione, punti isolati.
- Definizione di **limite** (con punto di accumulazione e valore del limite in \mathbf{R}^*).
- Unicità del limite. Teoremi di definita limitatezza e permanenza del segno.
- Limiti desti e sinistri.
- La funzione segno di x . Restrizioni ed estensioni di funzioni [F è una estensione di una funzione f con dominio A se il dominio B di F contiene A e se $F(x)=f(x)$ per ogni x in A].
- Algebra dei limiti. Teorema del confronto. Algebra parziale dei limiti in \mathbf{R}^* .
- **Limiti notevoli e "gerarchie di infinito"**: a^n/n^p , con $a>0$ e p in \mathbf{N}_0 ; $a^{1/n}$; $n^{1/n}$.
- Limiti laterali di funzioni monotone.
- **Potenze ed esponenziali con base $a>0$ ed esponente x reale:** definizioni e proprietà.
- Definizione dei **logaritmi** e loro proprietà principali.
- Definizione del **numero e** di Nepero (o di Eulero).
- Definizione di **continuità** e proprietà elementari (somma, prodotto, quoziente di funzioni continue; teorema di permanenza del segno; continuità sinistra e destra; esempi: identità, modulo, funzioni razionali); discontinuità (classificazione). Composizione di funzioni e teorema sui limiti di funzioni composte. Composizione di funzioni continue.
- Continuità degli esponenziali e dei logaritmi.
- **Funzioni iperboliche**; loro inverse e loro continuità.
- **Limiti notevoli** (incluso limiti notevoli delle funzioni iperboliche: $\text{sh } x/x$, $(\text{ch } x - 1)/x^2$, $\text{sh}^{-1} x / x$ per $x \rightarrow 0$).
- **Serie numeriche:** definizioni e proprietà elementari. Serie **telescopiche**; serie di Mengoli.

- Serie a termini positivi: criteri di convergenza (confronto, confronto asintotico, rapporto, radice, criterio di condensazione di Cauchy). La serie geometrica generalizzata o funzione di Riemann.
- Serie a termini in \mathbf{R} : criterio di convergenza assoluta. Somme "per parti" e criterio di Dirichlet; criterio di Leibnitz.
- **Serie esponenziale** e identità $\exp(x)=e^x$. Serie iperboliche. Stime sulle code esponenziali. Irrazionalità di e .
- **Definizione per serie di seno e coseno.**
- Proprietà locali (vicino a 0) di coseno e seno (incluso continuità e limiti notevoli). Formula di addizione per il coseno (dimostrazione facoltativa) e prime conseguenze: limitatezza, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$; formula di duplicazione per il coseno; continuità del coseno su \mathbf{R} . Formula di addizione del seno e continuità del seno.
- Teorema sull'esistenza di zeri per funzioni continue.
- Teorema: *esiste un unico $1 < \beta < 2$ tale che $\cos \beta = 0$ e $\cos x > 0$ per ogni $0 \leq x < \beta$.* Definizione $\pi := 2\beta$.
- Valori del seno e coseno in $k\pi/2$ (k intero); periodicità.
- **Sottosuccessioni.** Teorema di Bolzano-Weierstrass. Successioni di Cauchy.
- **Massimo e minimo limite.**
- Definizione di **topologia** e topologia standard di \mathbf{R} . Insiemi chiusi; caratterizzazione per successioni di insiemi non chiusi, non aperti e chiusi. Insiemi compatti per successioni. In \mathbf{R} i compatti coincidono con i chiusi e limitati. Un insieme compatto ha massimo e minimo. Chiusura e interno di un insieme. La chiusura di E coincide con E unione i suoi punti reali di accumulazione. Frontiera insiemistica; la frontiera coincide con l'intersezione della chiusura di E e con la chiusura del complementare di E .
- **Funzioni continue e topologia:** teorema ponte; continuità topologica (caratterizzazione in termini di aperti). **Funzioni continue su compatti:** una funzione continua manda compatti in compatti; teorema di Weierstrass; f continua e iniettiva su un compatto ha inversa continua.
- **Funzioni continue su intervalli:** l'immagine di un intervallo è un intervallo e teorema dei valori intermedi; iniettività equivale a stretta monotonia; continuità dell'inversa. Inverse delle funzioni trigonometriche.
- **Uniforme continuità:** Teorema di Heine-Cantor (una funzione continua su un compatto è ivi uniformemente continua).