ESONERO 2

AM110 – CL Matematica (AA 2016/17 – L. Chierchia). 9/1/2017

Parte 1. Definizioni ed esempi (20 punti)

Es 1 [Pt. 5] Definire π (in termini del coseno), spiegando brevemente perché la definizione è ben posta.

Es 2 [Pt. 5] Dare la definizione di continuità e di uniforme continuità. Dare un esempio di funzione continua su $(0,1)$ ma non ivi uniformemente continua.

Es 3 [Pt. 5] Definire massimo e minimo limite di una successione. Dare un esempio in cui $\liminf a_n < \limsup a_n$.

Es 4 [Pt. 5] Definire: intervallo aperto; insieme aperto; insieme chiuso. Dare esempi.

Parte 2. Svolgimento di esercizi assegnati (60 punti)

Es 6 [Pt. 10] Discutere la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\, n!}{n^n}$.

Soluzione: Usando il criterio del rapporto, poiché

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{(n+1)}\,(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{3^n\, n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1\ ,$$

la serie è divergente.

Es 7 [Pt. 15] Trovare i valori di x per cui converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log nx}{1+n^2x^2}$.

Soluzione: I termini della serie sono definiti per $x > 0$.
Dal limite notevole $\lim\limits_{t\to\infty} (\log t)/\sqrt{t} = 0$ segue che $\log t < \sqrt{t}$ definitivamente; dunque, per ogni $x > 0$, esiste N tale che, per ogni $n \geq N$, $\dfrac{\log nx}{1+n^2x^2} < \dfrac{\sqrt{nx}}{1+n^2x^2} < \dfrac{1}{(nx)^{3/2}}$. Quindi, $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} \frac{\log nx}{1+n^2x^2} \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{(nx)^{3/2}} = \frac{1}{x^{3/2}} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, che converge. Quindi (per confronto) la serie data converge per ogni $x > 0$

Es 8 [Pt. 15] Trovare i valori di x per cui converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log \sqrt[n]{1+\frac{x}{n}}$.

Soluzione: I termini della serie sono definiti per $x > -1$.
Ora, $\log \sqrt[n]{1+\dfrac{x}{n}} = \dfrac{1}{n} \log\left(1+\dfrac{x}{n}\right) \sim \dfrac{x}{n^2}$ e quindi la serie converge (confronto asintotico).

Es 9 [Pt. 10] Trovare massimo e minimo limite di $a_n = \arctan(-2)^n$.

Soluzione: $-\pi/2 < \arctan x < \pi/2$ e $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \arctan 4^k = \pi/2$ e $\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \arctan(-2\cdot 4^k) = -\pi/2$; dunque $\limsup a_n = \pi/2$ e $\liminf a_n = -\pi/2$.

Es 10 [Pt. 10] Trovare l'interno e i punti di frontiera di $E := \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} (2n-1, 2n)$.

Soluzione: E è aperto (essendo unione di intervalli aperti) quindi $\mathring{E} = E$. I punti di frontiera sono gli estremi degli intervalli $(2n-1, 2n)$ per $n \geq 1$, ossia $\mathbb{N}$ [infatti qualunque intervallo aperto centrato in $2n-1$ o $2n$ contiene sia punti interni che punti esterni].

Parte 3. Esercizio originale [Pt 20+10+...]

Es 11 Sia E l'insieme delle $x \in \mathbb{R}$ per cui la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{\operatorname{sen}\left(x - \frac{1}{n}\right)}$.

(a) [Pt. 10] Determinare E (si faccia particolare attenzione al caso $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$). Si denoti con $f(x)$ il valore della serie per $x \in E$.

Soluzione: I termini della serie sono definiti per $x \in A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1/n \text{ con } n \in \mathbb{N}\}$; se $x \in A$, dal criterio della radice segue che $\lim \left| \frac{e^{-n}}{\operatorname{sen}\left(x - \frac{1}{n}\right)} \right|^{1/n} = e^{-1} < 1$ e la serie converge assolutamente per tali x e quindi $E = A$.

(b) [Pt. 5] Sia $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Si dimostri che esistono δ e N tale che $|\operatorname{sen}\left(x - \frac{1}{n}\right)| > \delta$ per ogni $n \geq N$. [Suggerimento: si usi un teorema noto.]

Soluzione: Se $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), $\lim |\operatorname{sen}\left(x - \frac{1}{n}\right)| = |\operatorname{sen} x| > 0$ e l'affermazione segue dal teorema della permanenza del segno.

(c) [Pt. 5] Sia $x \neq k\pi$ e $\varepsilon > 0$. Dimostrare che esiste N t.c. $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} \left| \frac{e^{-n}}{\operatorname{sen}\left(x - \frac{1}{n}\right)} \right| < \varepsilon$.

Soluzione: Infatti se $x \neq k\pi$, segue che $\left| \frac{e^{-n}}{\operatorname{sen}\left(x - \frac{1}{n}\right)} \right| < \frac{e^{-n}}{\delta}$ definitivamente e, poiché $\sum e^{-n}$ è convergente (essendo la serie geometrica di ragione $e^{-1} < 1$), la tesi segue dal fatto che $\displaystyle\lim_{N \to \infty} \sum_{n=N}^{\infty} e^{-n} = 0$.

(d) [Pt. 10] Dimostrare che f è continua in $[2, 3]$.

Soluzione: Dimostriamo che f è uniformemente continua su $[2, 3]$. Sia $\varepsilon > 0$. Sia N come in (c) con ε sostituito da $\varepsilon/4$. Sia $g = \displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} \frac{e^{-n}}{\operatorname{sen}\left(x - \frac{1}{n}\right)}$ e si noti che g (essendo somma *finita* di funzioni continue) è continua su $[2, 3]$ e quindi uniformemente continua. Sia δ tale che $|g(x) - g(y)| < \varepsilon/2$ per ogni $x, y \in [2, 3]$ con $|x - y| < \delta$. Allora,

$$|f(x) - f(y)| \leq |g(x) - g(y)| + \sum_{n=N}^{\infty} \left| \frac{e^{-n}}{\operatorname{sen}\left(x - \frac{1}{n}\right)} \right| + \sum_{n=N}^{\infty} \left| \frac{e^{-n}}{\operatorname{sen}\left(y - \frac{1}{n}\right)} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Altre domande (solo se si sono svolti tutti gli esercizi precedenti): È vero che f è continua su E?

Soluzione: No: f non è continua in $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$); infatti $\limsup_{x \to k\pi} |f(x)| = +\infty$.

È vero che f è uniformemente continua su E?

Soluzione: Ovviamente no, non essendo continua su E.

È vero che f è uniformemente continua in $[2, 3.14)$?

Soluzione: Sì . La dimostrazione è identica a quella fatta sopra (essendo $[2, 3.14] \subset E$ e $k\pi \notin [2, 3.14]$).