AM110 (analisi 1) – Definizioni

Luigi Chierchia – Università Roma Tre (aa 2017/18)

Definizione 1
(i) *Dati due insiemi non vuoti A e B una* **relazione $\mathcal{R}$ di A in B** *è un sottoinsieme*[1] $\mathcal{R} \subseteq A \times B$. *Una* **relazione in A** *è una relazione di A in A.*
(ii) *Una* **funzione f di A in B** *è una relazione di A in B tale che se $(x, y) \in f$ e $(x, y') \in f$, allora $y = y'$, in altri termini, una funzione è una relazione tale che due elementi distinti non possono avere la stessa prima componente*[2].
Il **dominio** *di una funzione $f \subseteq A \times B$ è l'insieme $D_f := \{x \in A \,|\, (x, y) \in f\}$.*
Il **range** *o l'***immagine** *di f è l'insieme $R_f := f(D_f) := \{y \in B \,|\, (x, y) \in f\}$.*
Una **funzione da A in B** *è una funzione di A in B con $D_f = A$ (e si denota $f : A \to B$); diremo anche che una funzione da A in B è una funzione con dominio A e* **codominio** *B;*
una **funzione da A su B** *(o funzione "suriettiva") è una funzione da A in B con $R_f = B$;*
una funzione da A in B si dice **iniettiva** *se $(x, y) \in f$ e $(x', y) \in f$ implica $x = x'$;*
una **funzione biunivoca** *da A in B è una funzione iniettiva da A su B.*
(iii) *Una* **operazione binaria su** *A è una funzione da $A \times A$ in A.*

Definizione 2
L'insieme dei numeri reali, *denotato $\mathbb{R}$, è un insieme su cui sono date due operazioni binarie, "somma" (denotata con "$+$") e "prodotto" (denotata con "$\cdot$") e una relazione di "ordine" (denotata "$\leq$"), che soddisfano i seguenti quindici assiomi "algebrici"* [(S$_1$)÷(S$_4$), (P$_1$)÷(P$_4$), (O$_1$)÷(O$_4$), (SP), (SO), (PO)] *ed un sedicesimo assioma* [(ES)] *di "completezza" o "dell'estremo superiore".*

Assiomi della addizione*:*

(S$_1$)	$(x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$	proprietà associativa di $+$
(S$_2$)	$\exists\, 0 \in \mathbb{R}$ tale che $x + 0 = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$	esiste elemento neutro per $+$
(S$_3$)	$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\exists\, y \in \mathbb{R}$, tale che $x + y = 0$	esistenza elemento opposto
(S$_4$)	$x + y = y + x \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$	proprietà commutativa di $+$

Assiomi del prodotto[3]*:*

(P$_1$)	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$	proprietà associativa di $\cdot$
(P$_2$)	$\exists\, 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0$, tale che $x \cdot 1 = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$	esiste elemento neutro per $\cdot$
(P$_3$)	$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, $\exists\, y \in \mathbb{R}$ tale che $x \cdot y = 1$	esistenza del reciproco
(P$_4$)	$x \cdot y = y \cdot x \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$	proprietà commutativa di $\cdot$

Proprietà distributiva*:*
(SP) $\quad x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$

Assiomi di ordine[4] **totale***:*

[1] Di solito, una coppia "in relazione" $(x, y) \in \mathcal{R}$ si denota anche $x\mathcal{R}y$.

[2] Di solito, una coppia (x, y) di una funzione f, si denota con $(x, f(x))$; per una funzione f si usano anche le notazioni standard $f : x \mapsto f(x)$ o semplicemente $f(x)$.

[3] Spesso, in seguito, ometteremo il simbolo "$\cdot$" denotando $x \cdot y$ semplicemente con xy.

[4] Una relazione che soddisfi esclusivamente le proprietà riflessiva, antisimmetrica e transitiva si dice relazione di "ordine parziale".

(O$_1$) $x \le x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ — proprietà riflessiva di $\le$

(O$_2$) $x \le y,\ y \le x$ allora $x = y$ — proprietà antisimmetrica di $\le$

(O$_3$) $x \le y,\ y \le z$ allora $x \le z$ — proprietà transitiva di $\le$

(O$_4$) $x \le y$ o $y \le x \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$ — ordine totale di $\le$

Assioma di somma e ordine*:*

(SO) $x \le y$ allora $x + z \le y + z \quad \forall\, z \in \mathbb{R}$

Assioma di prodotto e ordine*:*

(PO) $0 \le x,\ 0 \le y$ allora $0 \le x \cdot y$

Assioma di di completezza (o dell'esistenza dell'estremo superiore)*:*

Prima di enunciare l'assioma di completezza diamo le seguenti definizioni: dato $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, si dice che A è **limitato superiormente** *se $\exists\ M \in \mathbb{R}$ tale che $x \le M$, $\forall\ x \in A$; un tale M si chiama* **maggiorante** *di A.*

(ES) *Per ogni $A \subseteq \mathbb{R}$ limitato superiormente esiste un numero s, detto* **estremo superiore di** *A che è il pù piccolo dei maggioranti di A.*

Definizione 3

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto.

A si dice **limitato inferiormente** *se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $m \le x$ per ogni $x \in A$; un tale m prende il nome di* **minorante** *per A.*

Se A è limitato inferiormente, un numero r che sia il più grande dei minoranti di A prende il nome di **estremo inferiore di** *A.*

Un insieme limitato superiormente e inferiormente si dice **limitato***.*

Se un maggiorante M di A appartiene ad A, tale M prende il nome di[5] **massimo di** *A. Analogamente, se un minorante m di A appartiene ad A, tale m prende il nome di* **minimo di** *A.*

Definizione 4

$y - x := y + (-x) \quad \forall\ x, y \in \mathbb{R}$ — differenza o sottrazione

$x/y := \dfrac{x}{y} := x \cdot y^{-1} \quad \forall\ x, y \in \mathbb{R},\ y \neq 0$ — rapporto o divisione

$2 := 1 + 1$

$x^2 := x \cdot x$

$x \ge y$ è equivalente, per definizione, a $y \le x$.

$x < y$ è equivalente, per definizione, a $x \le y$ e $x \neq y$; $x > y$ è equivalente a $y < x$

$x + y \cdot z := x + (y \cdot z)$

L'insieme dei **numeri positivi** *$\{x \in \mathbb{R} |\ x > 0\}$ si denota con $\mathbb{R}_+$; l'insieme dei* **numeri non negativi** *$\{x \in \mathbb{R} |\ x \ge 0\}$ si denota con $\overline{\mathbb{R}}_+$. Analogamente, $\mathbb{R}_-$ e $\overline{\mathbb{R}}_-$ denotano, rispettivamente, i numeri negativi e i numeri non positivi.*

[5] In altre parole, A ammette massimo (minimo) se esiste $M \in A$ ($m \in A$) tale che $x \le M$ ($m \le x$) per ogni $x \in A$.

Definizione 5

*Per ogni $x \in \mathbb{R}$ definiamo la seguente funzione, detta "***valore assoluto***" o "***modulo***" di x:*

$$|x| := \max\{x, -x\} = \begin{cases} x \ , & \text{se } x \geq 0 \ , \\ -x \ , & \text{se } x < 0 \ . \end{cases} \tag{1}$$

Definizione 6

*Per ogni $x \in \mathbb{R}$ definiamo la seguente funzione, detta "***segno***" di x:*

$$\mathrm{sgn}\,(x) := \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} \ , & \text{se } x \neq 0 \ , \\ 0 \ , & \text{se } x = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Definizione 7

(i) Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, $-A$ denota l'insieme $\{-x \big| x \in A\}$.
(ii) Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ di dice **simmetrico** *se $-A = A$; equivalentemente, A è simmetrico se $x \in A$ implica $-x \in A$.*
(iii) Sia A un insieme simmetrico. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice **pari** *se $f(-x) = f(x)$, si dice* **dispari** *se $f(-x) = -f(x)$.*

Definizione 8

(i) *Un insieme $I \subseteq \mathbb{R}$ viene detto* **induttivo** *se:*

- $1 \in I$
- $x \in I \implies x + 1 \in I$.

(ii) *L'insieme dei* **numeri naturali** *$\mathbb{N}$ è il più piccolo insieme induttivo di $\mathbb{R}$, cioè*

$$\mathbb{N} := \{x \in \mathbb{R} \,|\ x \in I, \forall\ I \subseteq \mathbb{R} \text{ induttivo}\} = \bigcap_{I \text{ induttivo}} I$$

Definizione 9

L'insieme dei **numeri interi** *$\mathbb{Z}$ è l'insieme $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup -\mathbb{N}$; l'insieme degli* **interi non negativi** *si denota $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$; l'insieme degli* **interi negativi** *si denota $\mathbb{Z}_- := \{n \in \mathbb{Z} \big| n < 0\}$.*

Definizione 10

L'insieme dei **numeri razionali** *è definito come*

$$\mathbb{Q} := \{r = \frac{p}{q} \,|\ p \in \mathbb{Z} \ , \ q \in \mathbb{N}\} \ .$$

I numeri in $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ si chiamano **irrazionali**.

Definizione 11

(i) Un intero m *è divisibile per un intero* $d \neq 0$ *se esiste* $n \in \mathbb{Z}$ *tale che* $m = dn$*; in tal caso scriveremo* $d|m$ *e diremo che* d *è un* **divisore** *di* m*.*

(ii) Un numero naturale $n > 1$ *si dice* **primo** *se gli unici divisori positivi di* n *sono* 1 *e* n*.*

(ii) Dati due interi m *e* n *si definisce* **il massimo comun divisore** *(m.c.d.), e si denota con* (m, n)*, il massimo dell'insieme* $D := \{d \in \mathbb{N} |\ d|m \text{ e } d|n\}$*.*

(iv) Due interi m *ed* n *si dicono* **primi tra loro** *o coprìmi se* $(m, n) = 1$ *ossia se l'unico intero positivo che divide sia* m *che* n *è* 1*.*

Definizione 12

La quantità $(x + y)/2$ *si chiama* **media aritmetica** *di* x *e* y*, mentre*

$$d(x, y) := |x - y|$$

è la **distanza** *(euclidea) tra* x *e* y*.*

Definizione 13

Sia $x \in \mathbb{R}$*; si definisce* **parte intera di** x*, e si denota* $[x]$*, il massimo dell'insieme* $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$*. Tale intero è l'unico intero che verifica* $[x] \leq x < [x] + 1$*.*

La funzione $x \to \mathbb{R} \mapsto \{x\} := x - [x]$ *prende il nome di* **parte frazionaria di** x*.*

Definizione 14

Sia A *un insieme non vuoto. Una* **successione** *in* A *(o "a valori in* A*") è una funzione* $a : n \in \mathbb{N} \mapsto a_n \in A$*, ossia una funzione con dominio* $\mathbb{N}$ *e codominio* A*.*

Definizione 15

Definizione ricorsiva di x^n **con** $n \in \mathbb{N}$**,** $x \in \mathbb{R}$*:* $x^n := \begin{cases} x \ , & \text{se } n = 1 \ , \\ x \cdot x^{n-1} \ , & \text{se } n \geq 2 \ . \end{cases}$

Definizione 16

Definizione ricorsiva di $n!$ **con** $n \in \mathbb{N}_0$*:* $n! := \begin{cases} 1 \ , & \text{se } n = 0 \ , \\ n \cdot (n-1)! \ , & \text{se } n \geq 1 \ . \end{cases}$

Definizione 17

Definizione ricorsiva di sommatoria*: Data una successione* $\{a_n\}$ *si definisce, ricorsivamente, la sommatoria* $\sum_{k=1}^{n} a_k$ *degli* a_k *per* k *che varia tra 1 e* n *come*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k := \begin{cases} a_1 \ , & \text{se } n = 1 \ , \\ a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \ , & \text{se } n \geq 2 \ . \end{cases}$$

Definizione 18
Sia $n \in \mathbb{Z}$ *con* $n \le 0$ *e* $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$*. Si definisce*

$$x^0 := 1 \; ; \qquad x^n := \frac{1}{x^{-n}} \; , \quad \forall \; n < 0 \; .$$

Definizione 19
Sia $x \ge 0$*,* $n \in \mathbb{N}$ *e* $R_n := \{t \ge 0 | \; t^n \le x\}$*. L'estremo superiore di* R_n *si chiama* **radice ennesima (o "n–ma") di** x *e si denota con* $\sqrt[n]{x}$ *o con* $x^{\frac{1}{n}}$*.*

Definizione 20
Se $a > 0$ *e* $n \in \mathbb{N}$*, poniamo:* $a^{-\frac{1}{n}} := (a^{\frac{1}{n}})^{-1}$*.*

Definizione 21
Se $n \in \mathbb{Z}$ *è un numero intero dispari e* $x < 0$*, poniamo*

$$x^{\frac{1}{n}} := -|x|^{\frac{1}{n}} \; , \qquad (x < 0 \; , \; n \text{ dispari}) \; . \tag{3}$$

Definizione 22
Se $a > 0$*,* $r \in \mathbb{Q}$ *poniamo* $a^r := (a^p)^{\frac{1}{q}}$ *dove* $p \in \mathbb{Z}$ *e* $q \in \mathbb{N}$ *sono tali che* $r = p/q$*.*

Definizione 23
Se $x \le 0$ *e* $r = p/q$ *è un numero razionale con* q *è dispari, poniamo* $x^{p/q} := \big(x^{1/q}\big)^p$*.*

Definizione 24
(i) Un **polinomio** *su* $\mathbb{R}$ *è una funzione* $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *della forma*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k := a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \tag{4}$$

dove a_k *(i "coefficienti del polinomio") sono numeri reali fissati. Il numero intero* $d := \max\{k \big| \, 1 \le k \le n \text{ e } a_k \ne 0\}$ *si chiama* **grado di** P*; il grado del polinomio identicamente nullo (tutti gli* $a_k = 0$*), per convenzione, è* -1*.*

(ii) Una **retta** *in* $\mathbb{R}^2$ *(non parallela all'"asse delle y"* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| \; x = 0\}$*) è una funzione* $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *della forma* $r(x) = ax + b$ *con* $a, b \in \mathbb{R}$ *(ossia* r *è un polinomio di grado* $d \le 1$*); il coefficiente* a *si chiama* **coefficiente angolare** *della retta* r*.*

(iii) Un polinomio $x \in \mathbb{R} \to p(x) = ax^2 + bx + c$ *di grado 2 (ossia* $a \ne 0$*) si chiama* **parabola** *("con asse di simmetria verticale"); i numeri* $\Delta := b^2 - 4ac$ *e* $x_0 := -\dfrac{b}{2a}$ *si chiamano, rispetivamente,* **discriminante** *e* **vertice** *della parabola* p*; l'***asse di simmetria** *è la retta parallela all'asse delle* y *data da* $\{x = x_0\}$*.*

Definizione 25
Sia $f : A \to f(x) \in \mathbb{R}$*.*

(i) Si definisce **sup [inf, max, min] di** f *e si denota* $\sup\limits_A f$ $[\inf\limits_A f,\ \max\limits_A f,\ \min\limits_A f]$ *l'estremo superiore [l'estremo inferiore, il massimo, il minimo] dell'insieme* $\mathrm{im}\,(f) := \{f(x)\big| x \in A\}$. *Si dice che* f **non è limitata superiormente [inferiormente]** *se* $\mathrm{im}\, f$ *non è limitato superiormente [inferiormente].*

(ii) f *si dice* **crescente** *(o "non decrescente") su* A *se* $f(x) \geq f(y)\ \forall\ x \geq y,\ x, y \in A$.
f *si dice* **strettamente crescente** *su* A *se* $f(x) > f(y)\ \forall\ x > y,\ x, y \in A$.
f *si dice* **decrescente** *(o "non crescente") su* A *se* $f(x) \leq f(y)\ \forall\ x \geq y,\ x, y \in A$.
f *si dice* **strettamente decrescente** *su* A *se* $f(x) < f(y)\ \forall\ x > y,\ x, y \in A$.
f *si dice* **[strettamente] monotòna** *su* A *se è o [strettamente] crescente o [strettamente] decrescente.*

Definizione 26

I simboli $+\infty$ *e* $-\infty$ *prendono il nome di* **più e meno infinito**. *L'insieme*

$$\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{-\infty\}$$

prende il nome di **estensione dei numeri reali** *o* **retta estesa**. *Un elemento di* $\mathbb{R}^*$ *si dice finito se appartiene a* $\mathbb{R}$.

Si estende la relazione d'ordine "$\leq$*" a* $\mathbb{R}^*$ *ponendo*

$$-\infty \leq +\infty\ , \qquad -\infty \leq x \leq +\infty\ , \quad \forall\ x \in \mathbb{R}\ ;$$

diremo che $+\infty$ $[-\infty]$ *è un elemento positivo [negativo] di* $\mathbb{R}^*$.

Definizione 27

Se $A \subseteq \mathbb{R}$ *è un insieme non vuoto e non limitato superiormente, poniamo*

$$\sup A := +\infty\ ;$$

se $A \subseteq \mathbb{R}$ *è un insieme non vuoto e non limitato inferiormente, poniamo*

$$\inf A := -\infty\ .$$

Definizione 28

Un insieme non vuoto $I \subseteq \mathbb{R}$ *è un* **intervallo** *se comunque prese due punti* $x \leq y$ *di* I *si ha che* $t \in I$ *per ogni* $x \leq t \leq y$.
Se I *è un intervallo il suo estremo superiore [inferiore] (che, in generale, è un elemento di* $\mathbb{R}^*$*) prende il nome di* **estremo destro [sinistro]** *dell'intervallo* I.
Sia I *un intervallo e sia* $a := \inf I \leq b := \sup I$ *con* $a, b \in \mathbb{R}^*$. *Se* a *e* b *non appartengono ad* I *l'intervallo si dice* **aperto** *e si denota con* (a, b)*; se* a *e* b *appartengono ad* I *l'intervallo si dice* **chiuso** *e si denota con* $[a, b]$*; se* $a \in I$ *e* $b \notin I$, I *si denota con* $[a, b)$*; se* $a \notin I$ *e* $b \in I$, I *si denota con* $(a, b]$.
Se I *è un intervallo limitato di* $\mathbb{R}$ *e* $a \leq b$ *sono i suoi estremi, la* **lunghezza** *o* **misura** *di* I *è il numero non negativo*

$$\ell(I) := b - a\ ;$$

tale numero si denota anche $\mathrm{mis}(I)$ *o* $|I|$*; se* I *è un intervallo non limitato, poniamo* $\ell(I) = +\infty$.

Definizione 29
Sia $x \in \mathbb{R}$; un qualunque intervallo aperto che contiene x prende il nome di **intorno di** *x; un intervallo $(a, +\infty)$ è* **un intorno di** $+\infty$*; un intervallo $(-\infty, b)$ è* **un intorno di** $-\infty$.
Sia $x \in \mathbb{R}$; un **intorno simmetrico di** *x è un intervallo della forma $(x - \delta, x + \delta)$ con $\delta > 0$ e si denota con $I_\delta(x)$.*

Definizione 30
Sia $\mathcal{P}(x)$ una affermazione che dipende da $x \in \mathbb{R}^*$. Diremo che "$\mathcal{P}(x)$ è **definitivamente** *vera per x che tende a x_0" o "$\mathcal{P}(x)$ è vera per x* **vicino ad** *x_0" se esiste un intorno U di x_0 tale che $\mathcal{P}(x)$ è vera per ogni $x \in U \backslash \{x_0\}$.*

Definizione 31
Sia A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$.
(i) $x \in A$ si dice **punto interno di** *A se esiste un intorno U di x contenuto in A. L'insieme di tutti i punti interni di A si denota $\mathring{A}$ e prende il nome di* **interno di** *A.*
(ii) $x \in A$ si dice **punto isolato di** *A se esiste un intorno U di x tale che $U \cap A = \{x\}$.*
(iii) $x \in \mathbb{R}^*$ si dice **di accumulazione per** *A se per ogni intorno di U di x si ha che $(U \cap A)\backslash\{x\} \neq \emptyset$, in altri termini, x è di accumulazione per A se in ogni intorno di x vi è almeno un punto di A diverso da x. L'insieme dei punti di accumulazione di un insieme A è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^*$ che prende il nome di* **derivato di** *A e si denota con $\mathscr{D}A$.*

Definizione 32
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathscr{D}A$, $L \in \mathbb{R}^*$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Diciamo che

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

(in parole, "L è il **limite** *di f per x che tende a x_0") se comunque preso un intorno V di L esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) \in V$ per ogni $x \in (U \cap A)\backslash\{x_0\}$; in formule:*

$$\boxed{L = \lim_{x \to x_0} f(x) \iff \forall\, V \,\text{intorno di}\, L \;,\; \exists\, U \,\text{intorno di}\, x_0 \,\Big|\, f(x) \in V,\, \forall\, x \in (A \cap U)\backslash\{x_0\}}$$

Qualora non vi sia ambiguità scriveremo $\lim\limits_{x \to x_0} f$ o anche $\lim f$ al posto della più completa notazione $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Definizione 33
Due elementi di $\mathbb{R}^*$ hanno lo **stesso segno** *se se sono o entrambi positivi o entrambi negativi.*

Definizione 34
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Un punto $x_0 > -\infty$ si dice **punto di accumulazione sinistro** *di A se*

$x_0 \in \mathscr{D}\big(A \cap (-\infty, x_0)\big)$. *Sia* $L \in \mathbb{R}^*$ *e* $f : A \to \mathbb{R}$. *Diciamo che* L *è il* **limite sinistro** *di* f *per* x *che tende a* x_0 **da sinistra** *e scriveremo*

$$L = \lim_{x \to x_0 -} f(x) \ ,$$

se si ha che $\forall\, V$ *intorno di* L $\exists\, U$ *intorno di* x_0 *tale che* $f(x) \in V$, $\forall\, x \in \big(A \cap U \cap (-\infty, x_0)\big)$.
La definizione di limite destro è analoga:
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. *Un punto* $x_0 < +\infty$ *si dice* **punto di accumulazione destro** *di* A *se* $x_0 \in \mathscr{D}\big(A \cap (x_0, +\infty)\big)$. *Sia* $L \in \mathbb{R}^*$ *e* $f : A \to \mathbb{R}$. *Diciamo che* L *è il* **limite destro** *di* f *per* x *che tende a* x_0 **da destra** *e scriveremo*

$$L = \lim_{x \to x_0 +} f(x) \ ,$$

se si ha che $\forall\, V$ *intorno di* L $\exists\, U$ *intorno di* x_0 *tale che* $f(x) \in V$, $\forall\, x \in \big(A \cap U \cap (x_0, +\infty)\big)$.
I limiti da sinistra o da destra si chiamano anche **limiti laterali**.

Definizione 35
Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in \mathscr{D}A$, *diremo che* f **si comporta come** g ($f \sim g$) **vicino a** x_0, *se* $g \neq 0$ *vicino a* x_0 *e* $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = 1$.

Definizione 36
Sia $f : A \to \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in A$. *Si dice che* f **è continua in** x_0 *se*

$$x_0 \text{ è un punto isolato di } A \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \ . \tag{5}$$

Se f *è continua in ogni punto di* A *si dice che* f **è continua su** A. *L'insieme di tutte le funzioni continue su* A *si denota con* $C(A)$.

Definizione 37
(i) *Siano* A *e* B *sottoinsiemi non vuoti di* $\mathbb{R}$; $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ *e* $\mathrm{im}\,(f) \subseteq B$. *Si chiama* **funzione composta** *e si denota con* $g \circ f$ *la funzione*

$$g \circ f : x \in A \mapsto g \circ f(x) := g\big(f(x)\big) \in \mathbb{R} \ .$$

(ii) *Sia* $A \neq \emptyset$ *un sottoinsieme di* $\mathbb{R}$; *sia* $f : A \to \mathbb{R}$ *una funzione iniettiva e sia* $B = \mathrm{im}\,(f)$ *l'immagine di* f. *Si chiama* **funzione inversa di** f *la funzione* $g : B \to A$ *che a* $y \in B$ *associa l'unico* $x \in A$ *tale che* $f(x) = y$; *equivalentemente,* g *è l'unica funzione da* B *in* A *tale che* $g \circ f = \mathrm{id}$ *dove* id *è la* **funzione identità**: $\mathrm{id}\,(x) = x$. *Talvolta la funzione inversa di* f *si denota con* f^{-1}. *Diremo anche che una funzione iniettiva è invertibile.*

Definizione 38
Sia $\{a_n\}$ una successione a valori in $\mathbb{R}$, $\{a_n\} : n \in \mathbb{N} \mapsto a_n \in \mathbb{R}$. Allora

$$\begin{array}{lll} \lim a_n & \text{significa :} & \lim_{n\to+\infty} a_n \\ a_n \to L & \text{significa :} & \lim_{n\to+\infty} a_n = L \\ a_n \nearrow & \text{significa :} & a_{n+1} > a_n \ , \ \forall\ n \in \mathbb{N} \ . \\ a_n \nearrow L & \text{significa :} & a_{n+1} > a_n \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = L \\ a_n \searrow & \text{significa :} & a_{n+1} < a_n \ , \ \forall\ n \in \mathbb{N} \ . \\ a_n \searrow L & \text{significa :} & a_{n+1} < a_n \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = L \ . \end{array}$$

La successione $\{a_n\}$ soddisfa la proprietà $\mathcal{P}$ **definitivamente** *se esiste N tale che $\{a_n\}$ soddisfa $\mathcal{P}$ per ogni $n \geq N$.*

Definizione 39 (Numero di Nepero)

$$e := \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ . \tag{6}$$

Definizione 40
Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si pone:

(i) $1^x := 1$;

(ii) *per* $a > 1$, $a^x := \lim_{t\in\mathbb{Q}, t\to x} a^t$;

(iii) *per* $0 < a < 1$, $a^x := (a^{-1})^{-x}$;

(iv) *la funzione $x \in \mathbb{R} \mapsto e^x$ (e numero di Nepero) prende il nome di* **funzione esponenziale**;

(v) *per $a > 0$, la funzione $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x$ prende il nome di* **funzione esponenziale in base** a.

Definizione 41
Dati $a > 1$ e $x > 0$ si chiama **logaritmo in base** a **di** x, *e si denota con $\log_a x$, il numero reale*

$$\log_a x := \sup\{t \in \mathbb{R} |\ a^t < x\} \ . \tag{7}$$

Se $0 < a < 1$, definiamo $\log_a x := -\log_{a^{-1}} x$.
Il logaritmo in base e (numero di Nepero) prende il nome di **logaritmo naturale di** x *e si denota con $\log x$.*

Definizione 42
Prendono rispettivamente il nome di **seno iperbolico**, **coseno iperbolico**, **tangente iperbolica**, **cotangente iperbolica**, **secante iperbolica** *e* **cosecante iperbolica** *le seguenti funzioni*

$$\begin{aligned} \operatorname{senh} x &:= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \ , & \cosh x &:= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \tanh x &= \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \ , & \operatorname{cotanh} x &= \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} \\ \operatorname{sech} x &= \frac{1}{\cosh x} \ , & \operatorname{csch} x &= \frac{1}{\operatorname{senh} x} \ . \end{aligned}$$

Le funzioni $\operatorname{senh} x$, $\cosh x$, $\tanh x$ *e* $\operatorname{sech} x$ *sono definite per ogni* $x \in \mathbb{R}$, *mentre* $\operatorname{cotanh} x$ *e* $\operatorname{csch} x$ *sono definite per* $x \neq 0$.

Definizione 43
La funzione

$$x \in \mathbb{R} \mapsto y := \operatorname{senh}^{-1} x := \operatorname{arcsenh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \ , \qquad (x \in \mathbb{R}) \ , \tag{8}$$

è la funzione inversa di $y \in \mathbb{R} \mapsto \operatorname{senh} y$ *e si chiama* **seno iperbolico inverso** *o* **arcoseno iperbolico**.
La funzione

$$x \in [1, +\infty) \mapsto y := \cosh^{-1} x := \operatorname{arccosh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \ , \qquad (x \geq 1) \ , \tag{9}$$

è la funzione inversa di $y \in [0, +\infty) \mapsto \cosh y$ *e si chiama* **ramo principale (o positivo) del coseno iperbolico inverso** *o* **ramo principale (o positivo) dell'arcocoseno iperbolico**.

Definizione 44
Sia $\{a_n\}$ *una successione di numeri reali. La* **serie con termini** a_n *è la successione* $\{s_n\}$ *con*

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \ . \tag{10}$$

Si dice che la serie $\{s_n\}$ *è:* **regolare** *se* $\lim s_n \in \mathbb{R}^*$; **convergente** *(a s) se* $\lim s_n = s \in \mathbb{R}$; **divergente** *(a* $\pm\infty$*) se* $\lim s_n = \pm\infty$; **irregolare** *se* $\{s_n\}$ *non ha limite.*
Se la serie $\{s_n\}$ *è regolare il suo limite si denota* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *o anche con* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *È anche di uso frequente indicare con il simbolo* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *(o anche solo con* $\sum a_n$*) la serie stessa* $\{s_n\}$ *(ad esempio per "comportamento di* $\sum a_n$*" si intende "comportamento della successione* $\{s_n\}$*").*
Si dice che **due serie** $\sum a_n$ **e** $\sum b_n$ **hanno lo stesso comportamento**, *in simboli*

$$\sum a_n \sim \sum b_n \ ,$$

se convergono entrambe o se divergono entrambe a $\pm\infty$ o se sono entrambe irregolari.
Una serie $\sum a_n$ *si dice* **a termini positivi** *se* $a_n > 0$ *per ogni* n*; una serie si dice* **a segni alterni** *se i suoi termini sono della forma* $a_n = (-1)^n b_n$ *con* $b_n > 0$ *(o* $b_n < 0$*); una serie si dice si dice* **telescopica** *se i suoi termini sono della forma* $a_n = b_n - b_{n+1}$ *con* $b_n \in \mathbb{R}$*.*
Una serie $\sum a_n$ *si dice* **assolutamente convergente** *se converge la serie* $\sum |a_n|$*.*
Più in generale, dato $m \in \mathbb{Z}$ *e numeri* a_k *con* $k \geq m$*, si può considerare la serie* $\{s_n\}$ *con*

$$s_n = \sum_{k=m}^{m-1+n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{m-1+k} = a_m + a_{m+1} + \cdot + a_{m-1+n} \ . \tag{11}$$

Le definizioni date sopra si estendono in modo ovvio a questo caso.

Definizione 45

La parte positiva di x *è la funzione*

$$x \in \mathbb{R} \mapsto x_+ := \frac{|x| + x}{2} = \max\{x, 0\} \in [0, +\infty) \ ;$$

la parte negativa di x *è la funzione*

$$x \in \mathbb{R} \mapsto x_- := \frac{|x| - x}{2} = -\min\{x, 0\} \in [0, +\infty) \ .$$

Definizione 46

La serie

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{12}$$

si chiama **funzione zeta di Riemann***.*

Definizione 47 (Serie esponenziale)

Per $x \in \mathbb{R}$ *poniamo*

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \ . \tag{13}$$

Definizione 48

Siano $n, k \in \mathbb{N}_0$ *con* $k \leq n$*. Si chiama* **coefficiente binomiale** n **sopra** k *il numero*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \tag{14}$$

Definizione 49

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in A \cap \mathscr{D}A$*.*

(i) *f ha una* **discontinuità di salto** *(o di prima specie) in x_0 se esistono (finiti) i limiti laterali in x_0 e* $\lim_{x\to x_0-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0+} f(x)$.

(ii) *f ha una* **discontinuità essenziale** *(o di seconda specie) in x_0 se uno dei limiti laterali non esiste (finito).*

(iii) *f ha una* **discontinuità eliminabile** *(o di terza specie) in x_0 se* $\lim_{x\to x_0} f = L \in \mathbb{R}$ *e* $L \neq f(x_0)$.

Definizione 50
Per ogni $x \in \mathbb{R}$ poniamo

$$\cos x := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} - \frac{x^{10}}{3628800} + \cdots$$

$$\operatorname{sen} x := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} - \frac{x^{11}}{39916800} + \cdots$$

Definizione 51
Pi greco, *π, è il doppio del primo zero positivo del coseno: $\pi := 2\beta$ dove $\beta \in (1,2)$ è tale $\cos\beta = 0$ e $\cos x > 0$ per ogni $x \in [0,\beta)$.*

Definizione 52
(i) *Si dice che una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ha* **periodo** *$T \neq 0$ (o che $T \neq 0$ è un periodo per f o che f è periodica di periodo T) se $f(x+T) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.*
(ii) *Un periodo $T > 0$ per f si dice* **minimo** *se non esiste un periodo T' per f con $0 < T' < T$.*

Definizione 53

$$\tan x := \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \qquad \forall\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\ , \tag{15}$$

$$\operatorname{cotan} x := \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \qquad \forall\, x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\ . \tag{16}$$

Definizione 54
(Rami principali delle funzioni trigonometriche inverse)

(i) *L'inversa della funzione*

$$x \in [-\pi/2, \pi/2] \mapsto \operatorname{sen} x \in [-1,1]$$

*prende il nome di (ramo principale) dell'***arcoseno***:*

$$x \in [-1,1] \mapsto \operatorname{Arcsen} x \in [-\pi/2, \pi/2]\ .$$

(ii) *L'inversa della funzione*

$$x \in [0,\pi] \mapsto \cos x \in [-1,1]$$

*prende il nome di (ramo principale) dell'***arcocoseno***:*

$$x \in [-1,1] \mapsto \text{ Arccos}\, x \in [0,\pi]\ .$$

(iii) *L'inversa della funzione*

$$x \in (-\pi/2,\pi/2) \mapsto \tan x \in \mathbb{R}$$

*prende il nome di (ramo principale) dell'***arcotangente***:*

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \text{ Arctan}\, x \in (-\pi/2,\pi/2)\ .$$

Definizione 55

Una **sottosuccessione** *(o* **successione estratta***) di una successione $\{a_n\}$ è una successione $\{b_k\}$ data da $b_k = a_{n_k}$ con $\{n_k\}$ strettamente crescente e a valori in $\mathbb{N}$.*

Definizione 56

(i) *Due insiemi non vuoti A e B si dicono* **in corrispondenza biunivoca** *o che hanno* **la stessa cardinalità***, e si denota $A \simeq B$, se esiste una funzione biunivoca φ da A su B.*

(ii) *Un insieme F si dice* **finito** *se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $F \simeq I_n$, dove $I_n := \{k \in \mathbb{N} |\ k \le n\}$. Tale n viene chiamato la* **cardinalità** *di F e si denota con $\#F$.*

(iii) *Un insieme E si dice* **infinito** *se non è finito.*

Definizione 57

Sia $\{a_n\}$ una successione a valori in $\mathbb{R}$.

(i) *Definiamo l'***insieme dei possibili limiti** *di $\{a_n\}$ come*

$$\mathcal{L} := \mathcal{L}_{\{a_n\}} := \{L \in \mathbb{R}^* \big|\, \exists\ a_{n_k} \to L\}\ , \qquad (n_k \nearrow)\ . \tag{17}$$

(ii) *Definiamo il* **limite superiore/inferiore** *o* **massimo/minimo limite** *come*

$$\begin{aligned} \limsup a_n &:= \overline{\lim}\, a_n := \max \mathcal{L}\ , \\ \liminf a_n &:= \underline{\lim}\, a_n := \min \mathcal{L} \end{aligned} \tag{18}$$

Definizione 58

Sia $\{a_n\}$ una successione a valori in $\mathbb{R}$.

(i) *Poniamo:* $\bar{a}_n := \sup\{a_k :\ k \ge n\} = \sup\limits_{k \ge n} a_k$; $\bar{\ell} := \inf \bar{a}_n$

(ii) *Poniamo:* $\underline{a}_n := \inf\{a_k :\ k \ge n\} = \inf\limits_{k \ge n} a_k$; $\underline{\ell} := \sup\limits_{n} \underline{a}_n$

(iii) *$M \in \mathbb{R}^*$ si dice* **maggiorante definitivo** *di $\{a_n\}$ se esiste N tale che $a_n \le M$, $\forall\ n \ge N$.*
Poniamo: $\overline{\mathcal{M}} := \overline{\mathcal{M}}_{\{a_n\}} := \big\{$*maggioranti definitivi di* $\{a_n\}\big\}$ *e* $\overline{m} := \inf \overline{\mathcal{M}}$.

(iv) *$M \in \mathbb{R}^*$ si dice* **minorante definitivo** *di $\{a_n\}$ se esiste N tale che $M \le a_n$, $\forall\ n \ge N$. Poniamo:* $\underline{\mathcal{M}} := \underline{\mathcal{M}}_{\{a_n\}} := \big\{$*minoranti definitivi di* $\{a_n\}\big\}$ *e* $\underline{m} := \sup \underline{\mathcal{M}}$.

Definizione 59
Una successione $\{a_n\}$ *si dice* **di Cauchy** *(o* **fondamentale***) se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $N \in \mathbb{N}$ *tale che* $|a_n - a_m| < \varepsilon$*, per ogni* $n, m \geq N$*.*

Definizione 60 (Assiomi di topologia)
Una **topologia** *su un insieme* X *è una famiglia* $\mathcal{A}$ *di sottoinsiemidi* X*, detti insiemi* **aperti***, che verifica:*

(τ_1) $\emptyset$*,* $X \in \mathcal{A}$*;*

(τ_2) *se* $A_i \in \mathcal{A}$*,* $\forall\, i \in J$*, allora* $\displaystyle\bigcup_{i \in J} A_i \in \mathcal{A}$*;*

(τ_3) *se* $A_i \in \mathcal{A}$*, per* $1 \leq i \leq n$*, allora* $\displaystyle\bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i \in \mathcal{A}$*.*

Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ *si dice* **chiuso** *se* $E^c := X \backslash E \in \mathcal{A}$ *ossia se il suo complementare è un insieme aperto.*

Definizione 61
La **topologia standard** *su* $\mathbb{R}$ *è la famiglia* $\mathcal{A}$ *in cui* $A \in \mathcal{A}$ *se e solo se o* $A = \emptyset$ *oppure ogni suo punto è un punto interno ossia* $\forall\, x \in A$ *esiste* $\delta > 0$ *tale che* $(x-\delta, x+\delta) \subseteq A$*.*

Definizione 62
$\mathscr{D}_{\mathbb{R}} E := \mathscr{D} E \cap \mathbb{R}$.

Definizione 63
(i) *La* **chiusura** *di un insieme* E*,* $\overline{E}$*, è il più piccolo insieme chiuso che contiene* E*, ossia* $\overline{E}$ *è chiuso e se* D *è un chiuso che contiene* E *allora* $\overline{E} \subseteq D$*.*

(ii) *La* **frontiera** *(o* **frontiera insiemistica***) di* E *è definita come* $\partial E := \overline{E} \backslash \mathring{E}$*.*

Definizione 64
Un insieme $K \subseteq \mathbb{R}$ *si dice* **compatto per successioni** *(o semplicemente "compatto") se comunque presa una successione in* K *esiste una sua sottosuccesione il cui limite appartiene a* K*.*

Definizione 65
Sia $f : E \to \mathbb{R}$ *e* $A \subseteq \mathbb{R}$*. La* **preimmagine** *di* A *per* f*,* $f^{-1}(A)$*, è il sottoinsieme di punti di* E *la cui immagine appartiene ad* A*:* $f^{-1}(A) := \{x \in E :\ f(x) \in A\}$*.*

Definizione 66
Una funzione $f : E \to \mathbb{R}$ *si dice uniformemente continua su* E *se*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ , \quad \exists\, \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon\ , \quad \forall\, x, y \in E\ ,\ |x - y| < \delta\ . \tag{19}$$

Definizione 67
Sia $f : E \to \mathbb{R}$ *e* $A \subseteq E \subseteq B$*. La restrizione di* f *ad* A *è la funzione*

$$f|_A : A \to \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad f|_A(x) = f(x)\ ,\ \forall\, x \in A\ . \tag{20}$$

Una estensione $\tilde{f}$ *di* f *su* B *è una funzione* $\tilde{f} : B \to \mathbb{R}$ *tale che* $\tilde{f}|_E = f$*.*