

ESONERO 1 – AM110 – CL Matematica (AA 2017/18 – L. Chierchia). 7/11/2017

NOME: _____ COGNOME: _____ MATRICOLA: _____

VALUTAZIONE:

es 1 [5]	es 2 [5]	es 3 [5]	es 4 [5]	es 5 [12]	es 6 [12]	es 7 [12]	es 8 [12]	es 9 [12]	es 10 [20]	totale

- Riportare qui sopra i dati richiesti. **Vanno riconsegnati unicamente questi due fogli.**
- Il punteggio totale è in centesimi; il punteggio di ogni singolo esercizio è indicato tra parentesi quadrate.
- È vietato: parlare, scambiarsi informazioni; consultare testi o appunti; l'uso del cellulare, calcolatrici, etc.
- **MOTIVARE SEMPRE LE RISPOSTE: Risposte senza giustificazioni non danno punteggio.**

Parte 1. Definizioni.

Es 1 [Pt. 5] Enunciare gli assiomi (SO) (“somma e ordine”), (PO) (“prodotto e ordine”), (ES) (“di completezza”).

Es 2 [Pt. 5] Dare la definizione di insieme induttivo, di \mathbb{N} , di \mathbb{Z} e \mathbb{Q} .

Es 3 [Pt. 5] Definire la radice n -ma ($n \in \mathbb{N}$) di un numero reale non negativo x .

Es 4 [Pt. 5] Dare la definizione di: intervallo di \mathbb{R} ; \mathbb{R}^* ; intorno; punto di accumulazione.

Parte 2. Svolgimento di esercizi assegnati (60 punti)

Es 5 [Pt. 12] Usando gli assiomi si dimostri:

(i) $-x = (-1) \cdot x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; (ii) $(-x)^{-1} = -(x^{-1})$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Es 6 [Pt. 12] Trovare sup e inf (max/min) dei seguenti insiemi:

(i) $\{x \in \mathbb{R} \mid x + 1 \geq 3x - 1\}$. (ii) $\{x = \frac{n^2}{n+2} \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Es 8 [Pt. 12] Trovare i punti interni, i punti isolati e i punti di accumulazione di \mathbb{N} .

Es 7 [Pt. 12] Trovare sup e inf (max/min) dell'insieme $\{y = x^2 \mid x^2 + x < 2\}$

Es 9 [Pt. 12] Dato $M > 0$ trovare $\delta > 0$ tale che $\frac{x}{(1-x)^2} > M$, per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $0 < |x - 1| < \delta$.

Parte 3. Esercizio originale (20 punti).

Es 10 [Pt. 20] (i) Sia $x_0 = 999/1000$. Dimostrare che esiste $\delta > 0$ tale che $|x^5 - 1| < \frac{1}{100}$ per ogni $0 < |x - x_0| < \delta$. (ii) Da (i) segue che $\lim_{x \rightarrow x_0} x^5 = 1$?

Soluzione Es 10: (i) Si può prendere $\delta = \frac{1}{1000}$. Infatti, $|x - x_0| < \delta$ equivale a

$$\frac{449}{500} < x < 1$$

e quindi

$$\begin{aligned} |x^5 - 1| &= 1 - x^5 = (1 - x) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4) < 5(1 - x) = 5(1 - x_0 + x_0 - x) \\ &= 5\left(\frac{1}{1000} + x_0 - x\right) < 5\left(\frac{1}{1000} + \delta\right) = \frac{1}{100}. \end{aligned}$$

(ii) Il $\lim_{x \rightarrow x_0} x^5 = (999/1000)^5 < 1$ e quindi (per l'unicità del limite) $\lim_{x \rightarrow x_0} x^5 = 1$ è falso e non può seguire da nessuna ipotesi (vera).