ESONERO 2 – *AM110 – CL Matematica (AA 2017/18 – L. Chierchia). 8/1/2018*

NOME:________________ **COGNOME:**________________ **MATRICOLA:**________________

VALUTAZIONE:

es 1 [5]	es 2 [5]	es 3 [5]	es 4 [5]	es 5 [12]	es 6 [12]	es 7 [12]	es 8 [12]	es 9 [12]	es 10 [20]	totale

- *Riportare qui sopra i dati richiesti.* **Vanno riconsegnati unicamente questi due fogli.**
- *Il punteggio totale è in centesimi; il punteggio di ogni singolo esercizio è indicato tra parentesi quadrate.*
- *È* **vietato***: parlare, scambiarsi informazioni; consultare testi o appunti; l'uso del cellulare, calcolatrici, etc.*
- **MOTIVARE SEMPRE LE RISPOSTE: Risposte senza giustificazioni non danno punteggio**.

Parte 1. Definizioni.

Es 1 [Pt. 5] Definire $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ e π (giustificando perché la definizione è ben posta).

Es 2 [Pt. 5] Dare la definizione di sottosuccessione e di massimo e minimo limite di una successione. Illustrare con esempi.

Es 3 [Pt. 5] Dare la definizione di funzione continua su un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$. Illustrare con esempi.

Es 4 [Pt. 5] Dare la definizione di serie, serie regolare, serie divergente, serie assolutamente convergente, serie telescopica. Illustrare con esempi.

Parte 2. Svolgimento di esercizi assegnati (60 punti)

Es 5 [Pt. 12] Calcolare il $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^2}{\log(1+\operatorname{sen}^4 x)}$.

Es 6 [Pt. 12] Calcolare se esiste (o altrimenti calcolare i limiti laterali) $\displaystyle\lim_{x\to 0} |x|^{1/x}$.

Es 8 [Pt. 12] Sia $f(0) = 0$ e, per $x \neq 0$, $f(x) := \dfrac{x + e^{1/x}}{|x| - e^{1/x}}$. Trovare il più grande insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ di continuità di f e discutere le eventuali discontinuità.

Es 7 [Pt. 12] Dire se converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Es 9 [Pt. 12] Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ converge $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n \log |x|^n$.

Parte 3. Esercizio originale (20 punti).

Es 10 [Pt. 20] (i) Sia $f \in C(\mathbb{R})$. Dimostrare che se esiste $a > 0$ e $x_n < y_n$ con $\lim x_n = +\infty$, $\lim(y_n - x_n) = 0$ e $|f(x_n) - f(y_n)| > a$, allora f non è uniformemente continua su $\mathbb{R}$.
(ii) Sia $x_n := \sqrt{n\pi}$. Calcolare $\lim x_n - x_{n-1}$.
(iii) Dire se $\cos x^2$ è uniformemente continua su $\mathbb{R}$.