Capitolo 1

Preliminari

1.1. La teoria degli insiemi

I principi sono sempre la parte più difficile. Se questo vale in genere per tutte le attività umane, ancora di più, forse, vale per la matematica, dove essi sono letteralmente i fondamenti di tutta la costruzione successiva.

Le ragioni di queste difficoltà sono facili da dire. La matematica ha a che fare con oggetti specifici, alcuni dei quali, i punti, le rette, i numeri, le figure geometriche, sono estratti dalle attività quotidiane dell'uomo; altri, come le funzioni, appartengono a un grado superiore di astrazione, e provengono per così dire dall'interno stesso della matematica. Normalmente, questi oggetti vengono introdotti mediante apposite definizioni, che ci dicono di cosa si tratta, eventualmente accompagnate da opportuni assiomi e postulati che ne descrivono le proprietà e ci danno le regole per il loro uso.

D'altra parte le definizioni non possono che riferirsi a qualcosa di già conosciuto. Si capisce dunque che man mano che si risale verso i principi, le cose conosciute diminuiscono, con il risultato che definizioni e assiomi divengano sempre più astratti. In genere, una definizione rimanda ad altri oggetti definiti in precedenza, in una scala che dal particolare va verso il generale. Quando però si giunge ai principi, questa catena ascendente si arresta: non ci sono concetti più generali ai quali riferirsi. In questi casi, non c'è che da rinviare al linguaggio comune, cercando di spiegare in parole povere e per mezzo di esempi che cosa si vuole intendere. Invece che delle definizioni si danno delle descrizioni. In questo caso si parla di oggetti o concetti *primitivi*, cioè che vengono supposti noti, senza che ci sia bisogno di darne una definizione formale, e che vengono introdotti per mezzo di spiegazioni ed esempi.

La scelta dei concetti primitivi è una questione di gusti e soprattutto di opportunità: dipende da cosa si vuole fare. Ad esempio, in geometria può essere opportuno partire dai concetti di retta e di cerchio, dei quali tutti abbiamo un'idea abbastanza chiara. Se invece ci interessa l'aritmetica, un buon punto di partenza è il concetto di numero intero, che conosciamo fin da bambini. È vero che la retta, il cerchio e il numero potrebbero essere definiti a partire da concetti ancora più primitivi, ma da una parte non è detto che un concetto più generale sia intuitivamente più comprensibile, e dall'altra per arrivare a definire i numeri occorrerebbe fare una fatica notevole, che non sarebbe pari all'effettivo guadagno. In effetti, specie all'inizio, la strada è abbastanza lunga, e se si volesse percorrerla tutta, prima di arrivare alle cose importanti si sarebbe consumato tutto il tempo disponibile. Quello che si fa allora è prendere una scorciatoia: si assumono più concetti primitivi del necessario, in modo da eliminare tutte le noiose parti intermedie.

Uno dei concetti fondamentali della matematica moderna è quello di *insieme*, che assumeremo come primitivo, accontentandoci di dire che un insieme A è una collezione di oggetti, che prendono il nome di *elementi* di A.

In molti casi, è possibile elencare esplicitamente gli elementi di A; ad esempio, se A è formato dai numeri 1 e 4, potremo scrivere

$$A = \{1, 4\}.$$

Da notare che l'ordine in cui sono elencati gli elementi è inessenziale; ad esempio l'insieme $\{4, 1\}$ coincide con l'insieme $\{1, 4\}$.

Se a è un elemento dell'insieme A, diremo che *a appartiene ad A*, e scriveremo

$$a \in A.$$

Se invece a non appartiene ad A, si scriverà $a \notin A$.

Attenzione! Non si deve confondere un elemento a con l'insieme $\{a\}$ costituito dal solo elemento a. Il primo è un elemento; il secondo un insieme. Così mentre $a \in \{a\}$ è un'affermazione vera, $\{a\} \in \{a\}$ è falsa ($\{a\}$ non è un elemento dell'insieme $\{a\}$).

A volte un insieme con un solo elemento si chiama *un singoletto*. Ad esempio, è un singoletto l'insieme $\{1\}$, ma non il numero 1, che non è un insieme. □

Insiemi che utilizzeremo spesso sono

1. L'insieme dei numeri *naturali* (gli interi positivi 1, 2, 3, ecc.), che indicheremo con $\mathbf{N}$.
2. L'insieme degli interi relativi $\mathbf{Z}$ (iniziale di *Zahlen*; in tedesco: numeri), i cui elementi sono i numeri interi positivi e negativi, e lo zero.
3. L'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali $\frac{p}{q}$, in cui q è un numero naturale e p un intero relativo. I numeri razionali si possono scrivere in forma decimale, semplicemente eseguendo la divisione; il risultato è un numero decimale finito $\left(\text{come ad esempio } \frac{3}{8} = 0.375\right)$ o un numero decimale periodico $\left(\text{come nel caso di } \frac{42}{99} = 0.424242\ldots = 0.\overline{42}\right)$.
4. L'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali, che è l'insieme di base per l'Analisi, e che esamineremo in dettaglio più avanti.
5. Gli insiemi $\mathbf{R}^+$ e $\mathbf{R}^-$, costituiti rispettivamente dai numeri reali positivi e negativi:

$$\mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$$
$$\mathbf{R}^- = \{x \in \mathbf{R} : x < 0\}.$$

Notiamo che nessuno degli insiemi precedenti può essere descritto elencandone gli elementi, dato che ce ne sono infiniti. In effetti, un insieme si può rappresentare esplicitamente solo se è finito, cioè se è costituito di un numero finito di elementi.[1] In caso contrario, o anche quando l'elencazione esplicita non è efficace, si può individuare un insieme assegnando una sua *proprietà caratteristica*, ossia una proprietà goduta esclusivamente dai suoi elementi.

Così ad esempio, $\mathbf{R}^+$ è l'insieme dei numeri $x \in \mathbf{R}$ tali che (:) $x > 0$.

In generale, se A è un insieme, e $\mathcal{P}(x)$ è una proprietà definita in A, possiamo considerare l'insieme B costituito da quegli elementi di A che godono della proprietà $\mathcal{P}(x)$; in formule:

$$B = \{x \in A : \mathcal{P}(x)\}.$$

L'insieme B così costruito si chiama *estensione* della proprietà $\mathcal{P}(x)$ in A.

Ad esempio la proprietà $\frac{x}{2} \in \mathbf{N}$ definisce l'insieme P dei numeri pari. Corrispondentemente, l'insieme P è l'estensione (in $\mathbf{N}$) della proprietà $\frac{x}{2} \in \mathbf{N}$.

A volte può accadere che la proprietà $\mathcal{P}(x)$, pur essendo definita per gli elementi di A, non sia soddisfatta da nessuno di essi. Ad esempio la proprietà

$$2n \text{ è dispari}$$

non è soddisfatta da nessun numero naturale n, dato che $2n$ è sempre un numero pari. Di conseguenza, l'insieme

$$\{n \in \mathbf{N} : 2n \ \text{ è dispari}\}$$

non contiene nessun elemento: è *l'insieme vuoto*.

L'insieme vuoto si indica con il simbolo $\emptyset$. Avremo dunque

$$\{n \in \mathbf{N} : 2n \ \text{ è dispari}\} = \emptyset.$$

[1] Peraltro nella pratica una rappresentazione esplicita è possibile solo se il numero di elementi dell'insieme è abbastanza piccolo; l'insieme delle persone viventi al 1 gennaio 2000 è sicuramente finito, ma non sarebbe semplice elencarle tutte.

Esercizi

1.1. Scrivere in forma esplicita i seguenti insiemi:

1. $\{x \in \mathbf{N} : 2 < x^2 < 11\}$
2. $\{x \in \mathbf{Z} : x^2 + 2x = 1\}$
3. $\{x \in \mathbf{R} : x^2 + 2x = 1\}$
4. $\{x \in \mathbf{N} : 6 - x \geqslant 0\}$
5. $\{d \in \mathbf{Z} : 5 - d^2 \in \mathbf{N}\}$
6. $\{w \in \mathbf{R}^+ : 3w^2 - 1 = 6w\}$
7. $\{x \in \mathbf{Z} : x^2 < 16\}$
8. $\{x \in \mathbf{N} : 3x < x + 8\}$
9. $\left\{x \in \mathbf{Z} : \dfrac{1}{7} < 2^x < 3\right\}$
10. $\{x \in \mathbf{R} : x^2 - 2ax + 4 = 0\}$

1.2. Sottoinsiemi

Dati due insiemi A e B, diremo che A è *contenuto* in B (o che è un *sottoinsieme*, o una *parte* di B) se ogni elemento di A appartiene anche a B. Se A è contenuto in B, scriveremo

$$A \subseteq B.$$

Se invece A non è un sottoinsieme di B, cioè se esiste almeno un elemento di A che non sia elemento di B, allora scriveremo

$$A \not\subseteq B.$$

Ad esempio, si ha $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$, e $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$, mentre $\mathbf{Q} \not\subseteq \mathbf{Z}$.

Attenzione! Gli elementi di un insieme A non sono sottoinsiemi di A. Ad esempio, i numeri 1, 2, 4, 35 sono elementi, ma non parti di $\mathbf{N}$. Sono invece sottoinsiemi di $\mathbf{N}$ i singoletti $\{1\}$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{35\}$, eccetera. □

Da notare che risulta sempre $A \subseteq A$, ovvero ogni insieme è un sottoinsieme di sé stesso.

Se vogliamo escludere questa eventualità, possiamo introdurre il concetto di *sottoinsieme proprio*; diremo che A è contenuto propriamente in B (o che è un sottoinsieme proprio di B) se $A \subseteq B$ *e se esiste almeno un elemento di B che non appartiene ad A*. In questo caso scriveremo

$$A \subset B.$$

In genere però si preferisce parlare di sottoinsiemi generici, includendovi anche l'insieme stesso.

Infine, l'insieme vuoto $\emptyset$ è contenuto in qualsiasi insieme B. Infatti se così non fosse, dovrebbe esistere un elemento a di $\emptyset$ che non è contenuto in B. Ma questo è impossibile, perché $\emptyset$ non ha nessun elemento.

Esempio 1.1 Se A è un insieme finito, è possibile, almeno in linea di principio, elencarne tutti i sottoinsiemi. Così ad esempio le parti dell'insieme

$$A = \{1, 2, 4\}$$

sono gli insiemi

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}.$$

Naturalmente, al posto di 1, 2 e 4 avremmo potuto scrivere a, b e c, o tre altri elementi qualsiasi. In ogni caso avremmo potuto concludere che un insieme di tre elementi ha otto sottoinsiemi. Allo stesso modo, un singoletto $\{a\}$ ha due sottoinsiemi: l'insieme vuoto e sé stesso. □

Questi fatti sono casi particolari di un risultato più generale.

Teorema 1.1 *Un insieme A con n elementi ha 2^n sottoinsiemi.*

Dimostrazione Dato un insieme A, e un elemento $c \notin A$, formiamo un nuovo insieme B aggiungendo c agli elementi di A.

I sottoinsiemi di B possono contenere o non contenere c. Quelli che non lo contengono sono anche sottoinsiemi di A, e dunque sono tanti quanti sono le parti di A. Quelli che contengono c sono altrettanti; infatti ognuno di essi si ottiene aggiungendo c a un sottoinsieme di A. Di conseguenza le parti di B sono il doppio delle parti di A.

Abbiamo così dimostrato che aumentando di uno il numero degli elementi di un insieme, si raddoppia il numero dei suoi sottoinsiemi. Ora, come si è visto, un insieme formato da un solo elemento ha due sottoinsiemi; se aggiungiamo un secondo elemento avremo che un insieme con due elementi (che ha un numero doppio di parti) ha quattro sottoinsiemi, uno con tre elementi, come abbiamo visto, ne ha $8 = 2^3$, uno con 4 elementi ne ha $16 = 2^4$, e così via.

Attenzione! Anche se a prima vista può sembrare rigorosa, la dimostrazione precedente nasconde qualche insidia nelle parole finali "e così via". Tutto va bene se si deve dimostrare che un insieme con 5 elementi ha $2^5 = 32$ elementi (basta fare un passo ulteriore), e se si ha molta pazienza per un insieme di 73 elementi (si ripete il raddoppio 72 volte). Ma siamo proprio sicuri di aver dimostrato la proprietà *per tutti gli interi n*? In altre parole, siamo certi che sommando ogni volta 1 al numero precedente finiremo per raggiungere un qualsiasi numero naturale? Per rispondere a questa domanda non ci si può affidare all'intuizione, ma bisogna far ricorso alla struttura assiomatica dell'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali. Vedremo più avanti, una volta introdotti gli assiomi di $\mathbf{N}$, come questa dimostrazione si possa rendere rigorosa. □

Il risultato precedente si può enunciare in maniera differente, introducendo due nuovi concetti: l'insieme delle parti e la cardinalità di un insieme.

Definizione 1.1 *Se A è un insieme, chiamiamo $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle parti di A, ovvero l'insieme i cui elementi sono i sottoinsiemi di A.*

Così se come nell'esempio 1.1 poniamo $A = \{1, 2, 4\}$, avremo

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}\}.$$

Definizione 1.2 *Se B è un insieme finito, chiamiamo* cardinalità *di B il numero degli elementi di B. La cardinalità di B si indica con*

$$\mathrm{card}(B) \quad \textit{o anche con } \#(B).$$

Ciò premesso, l'enunciato del teorema precedente è equivalente alla formula

$$\mathrm{card}(\mathcal{P}(A)) = 2^{\mathrm{card}(A)}. \qquad [1.1]$$

Osservazione 1.1 A volte l'insieme delle parti di A si indica anche con 2^A. Uno dei motivi di questa notazione a prima vista un po' bizzarra sta nella formula precedente, che diventa

$$\mathrm{card}(2^A) = 2^{\mathrm{card}\, A}.$$

Esercizi

1.2. Elencare i sottoinsiemi degli insiemi seguenti:

1. $\{0, 1\}$
2. $\{x \in \mathbf{N} : x^3 < 10\}$
3. $\emptyset$
4. $\{\emptyset\}$
5. $\{-1\}$
6. 4
7. $\{x \in \mathbf{R} : x^3 = 8x\}$
8. $\{1, 4, -1\}$
9. $\{u \in \mathbf{Q}^+ : u^2 = u^3\}$
10. $\{d \in \mathbf{N} : 3 < d < 8,\ d \text{ è primo}\}$

1.3. Operazioni con gli insiemi

Prima di proseguire, introduciamo alcune operazioni e le relative notazioni.

Definizione 1.3 (Unione) *Si chiama* unione *di due insiemi A e B, l'insieme i cui elementi sono tutti e soli quelli che appartengono ad almeno uno dei due insiemi A e B. L'unione di A e B si indica con $A \cup B$.*

Ad esempio, se

$$A = \{1, 3, 5\} \quad \text{e} \quad B = \{1, 4, 6, 19\}$$

risulta

$$A \cup B = \{1, 3, 5, 4, 6, 19\}.$$

Come si vede, appartengono all'unione sia gli elementi che compaiono in ambedue gli insiemi, come il numero 1, sia quelli che figurano in uno solo dei due, come tutti gli altri numeri.

Segue immediatamente dalla definizione che

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cup A = A, \quad A \cup \emptyset = A.$$

Si ha inoltre la proprietà associativa:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

Di conseguenza, si può scrivere $A \cup B \cup C$, senza indicare quale delle due operazioni si esegue per prima, cioè senza dover dire se si fa prima $A \cup B$, e poi si aggiunge C al risultato, o se si fa prima $B \cup C$, e poi l'unione di questo insieme con A. In ogni caso, si ottiene infatti lo stesso insieme.

Definizione 1.4 (Intersezione) *Si chiama* intersezione *di due insiemi A e B l'insieme costituito dagli elementi che appartengono sia ad A che a B. L'intersezione di A e B si indica con il simbolo $A \cap B$.*

Così nell'esempio precedente si ha

$$A \cap B = \{1\}.$$

Sono una conseguenza immediata della definizione le relazioni seguenti:

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cap A = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

come pure la proprietà associativa dell'intersezione:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Anche in questo caso, si può allora scrivere $A \cap B \cap C$, senza parentesi.

Osservazione 1.2 Se A e B non hanno elementi comuni, come avviene ad esempio quando $A = \{0, 1\}$ e $B = \{2\}$, la loro intersezione non contiene nessun elemento, e quindi è l'insieme vuoto:

$$\{0, 1\} \cap \{2\} = \emptyset.$$

Due insiemi privi di elementi comuni si dicono *disgiunti*.

Da notare che se non avessimo introdotto l'insieme vuoto, dovremmo dire che in questo caso i due insiemi non hanno intersezione; in generale, prima di parlare di intersezione di due insiemi, dovremmo verificare che essi abbiano almeno un elemento in comune. Allo stesso modo, non potremmo parlare dell'insieme

$$\{x \in A : P(x)\}$$

prima di aver dimostrato l'esistenza di almeno un $x \in A$ che gode della proprietà $P(x)$. L'insieme vuoto permette di evitare queste complicazioni, e in particolare permette di parlare dell'intersezione di due insiemi anche quando sono disgiunti. □

Definizione 1.5 (Differenza) *La differenza $E - A$ di due insiemi E e A è l'insieme costituito da tutti gli elementi di E che non appartengono a A.*

Notiamo che se $E \cap A = \emptyset$, si ha $E - A = E$. All'estremo opposto, se $E \subseteq A$, allora $E - A = \emptyset$.

Si possono rappresentare graficamente le operazioni sugli insiemi utilizzando i cosiddetti *diagrammi di Eulero-Venn*. L'idea è di rappresentare un insieme A mediante una regione del piano delimitata da una curva chiusa.

Se poi in A vogliamo mettere in evidenza alcuni elementi particolari, potremo indicarli all'interno della nostra regione, come si vede nella figura 1.1.

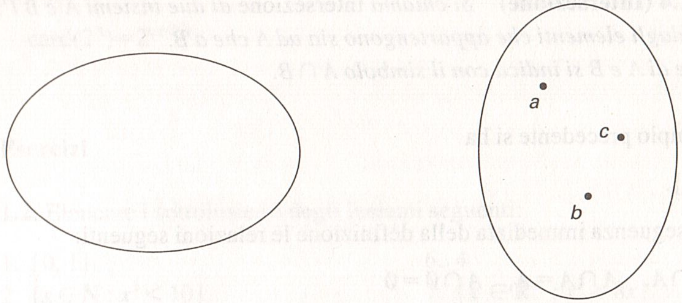


Figura 1.1

Ciò premesso, le figure seguenti illustrano l'unione $A \cup B$, l'intersezione $A \cap B$ e la differenza $B - A$.

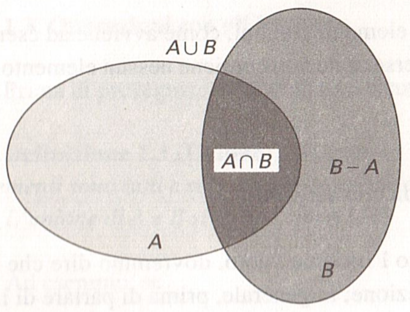


Figura 1.2

Osservazione 1.3 I diagrammi di Eulero-Venn sono delle *rappresentazioni* degli insiemi relativi, che niente hanno a che fare in generale con la loro struttura. Basterà osservare infatti che un insieme finito non ha niente a che vedere con una regione del piano, che in ogni caso è composta di infiniti punti.

D'altra parte questi diagrammi sono utilissimi per visualizzare delle situazioni astratte, e molte volte un enunciato riguardante insiemi qualsiasi si capisce solo dopo averlo schematizzato graficamente. Così accade spesso che la strada per dimostrare un teorema venga suggerita da un'analisi del diagramma relativo. □

Per le operazioni di unione, intersezione e differenza valgono le proprietà distributive:

$$E \cap (A \cup B) = (E \cap A) \cup (E \cap B). \qquad [1.2]$$
$$E \cup (A \cap B) = (E \cup A) \cap (E \cup B). \qquad [1.3]$$

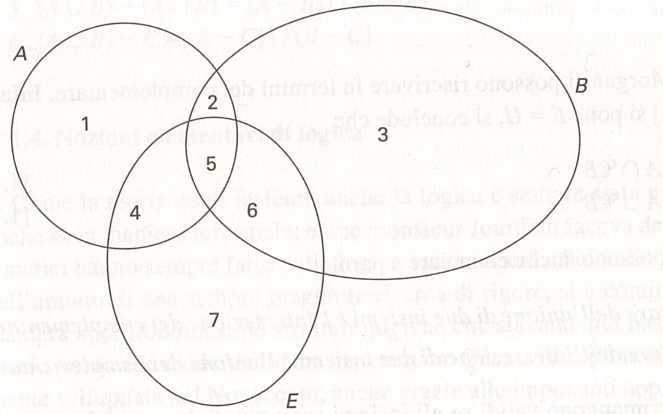


Figura 1.3

e le Leggi di De Morgan:

$$E - (A \cup B) = (E - A) \cap (E - B) \qquad [1.4]$$
$$E - (A \cap B) = (E - A) \cup (E - B) \qquad [1.5]$$

Possiamo visualizzare le formule precedenti mediante il diagramma di sopra. Per la [1.2], le zone 4, 5 e 6 rappresentano $E \cap (A \cup B)$; le 4 e 5 sono $E \cap A$, e le 5 e 6 $E \cap B$.

Analogamente, $E \cup (A \cap B)$ è rappresentato dalle zone 2, 4, 5, 6 e 7; $E \cup A$ da queste e dalla 1, ed $E \cup B$ dalle stesse più la 3.

Lo stesso diagramma può servire per le leggi di De Morgan; $E - (A \cup B)$ è costituito dalla sola zona 7, mentre $E - A$ è rappresentato dalla 7 e dalla 6, e $E - B$ dalla 7 e dalla 4. Infine, $E - (A \cap B)$ è formato dalle zone 4, 6 e 7, e quindi è l'unione di $E - A$ ed $E - B$.

La ragione del nome dato alle formule [1.2] e [1.3] sta nel fatto che la [1.2] ricorda la proprietà distributiva usuale

$$e(a+b)=ea+eb.$$

Nel caso degli insiemi, l'unione si comporta come la somma, e l'intersezione come il prodotto. Si tratta di un'analogia che talvolta è utile, ma che non bisogna prendere troppo alla lettera; ad esempio alla proprietà [1.3], che vale per gli insiemi, non corrisponde un'analoga proprietà nei numeri.

In molti casi tutti gli insiemi in esame sono parti di uno stesso insieme U. Ciò avviene ad esempio quando si considerano insiemi di numeri reali, che sono tutti sottoinsiemi di $\mathbf{R}$. Se ciò avviene, la differenza $U-A$ si chiama *complementare di A* e si indica con il simbolo

$$\mathscr{C}A.$$

Le leggi di De Morgan si possono riscrivere in termini del complementare. Infatti se nelle [1.4] e [1.5] si pone $E=U$, si conclude che

$$\mathscr{C}(A\cup B)=\mathscr{C}A\cap\mathscr{C}B \qquad [1.6]$$
$$\mathscr{C}(A\cap B)=\mathscr{C}A\cup\mathscr{C}B \qquad [1.7]$$

due formule che si possono anche enunciare a parole:

il complementare dell'unione di due insiemi è l'intersezione dei complementari,

il complementare dell'intersezione di due insiemi è l'unione dei complementari.

Questi enunciati rimangono validi se gli insiemi sono più di due, e anche se sono infiniti.

Esercizi

1.3. Calcolare l'unione $A\cup B$, l'intersezione $A\cap B$ e la differenza $A-B$ dei seguenti insiemi:

1. $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{1,3,5\}$
2. $A=\{1,3,5,7\}$, $B=\{1,5,9,21\}$
3. $A=\{x\in\mathbf{Z}:x^2<10\}$, $B=\{x\in\mathbf{N}:x^2<10\}$
4. $A=\{x\in\mathbf{R}:x^2-x=2\}$, $B=\mathbf{R}^-$
5. $A=\{x\in\mathbf{N}:x^2<15\}$, $B=\{x\in\mathbf{N}:x^2>10\}$
6. $A=\{1,2,3\}$, $B=\{3,2,1\}$
7. $A=\{x\in\mathbf{Q}:x^2=2\}$, $B=\{x\in\mathbf{R}:x^2=2\}$

1.4. Calcolare $A\cap(B\cup C)$, $(A-B)\cap C$ e $(A\cup B)-C$ nei casi seguenti:

1. $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{2,4,6\}$, $C=\{1,3,4\}$
2. $A=\{-1,0,1,2\}$, $B=\{-1,2,3\}$, $C=\{2,3,4\}$
3. $A=\mathbf{N}$, $B=\mathbf{Q}^+$, $C=\mathbf{Z}$
4. $A=\mathbf{R}$, $B=\emptyset$, $C=\{1\}$
5. $A=\{0\}$, $B=\emptyset$, $C=\mathbf{R}$

1.5. Tramite i relativi diagrammi di Eulero-Venn visualizzare le relazioni seguenti:

1. $A-(A-B)=A\cap B$
2. $A\cup(B-A)=A\cup B$
3. $(A\cap B)\cup(A-B)=A$
4. $(A\cup B)-A=B-A$
5. $(A\cup B)-(A\cap B)=(A-B)\cup(B-A)$
6. $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$

1.10. Risposte agli esercizi

1.1.

1. $\{2, 3\}$
2. $\emptyset$
3. $\{-1+\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}\}$
4. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
5. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
6. $\left\{1+\frac{2}{\sqrt{3}}, 1-\frac{2}{\sqrt{3}}\right\}$
7. $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
8. $\{1, 2, 3\}$
9. $\{-2, -1, 0, 1\}$
10. $\emptyset$ se $-2<a<2$; $\{a\}$ se $a=-2$ o $a=2$, $\{a+\sqrt{a^2-4}, a-\sqrt{a^2-4}\}$ se $a<-2$ o $a>2$

1.2.

1. $\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0, 1\}$
2. $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$
3. $\emptyset$
4. $\emptyset$, $\{\emptyset\}$
5. $\emptyset$, $\{-1\}$
6. Non è un insieme
7. $\emptyset$, $\{-2\}$
8. $\emptyset$, $\{1\}$, $\{4\}$, $\{-1\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, -1\}$, $\{4, -1\}$, $\{1, 4, -1\}$
9. $\emptyset$, $\{1\}$
10. $\emptyset$, $\{5\}$, $\{7\}$, $\{5, 7\}$

1.3.

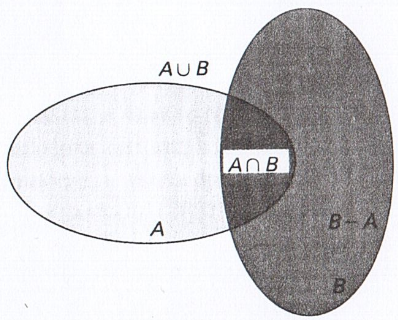
1. $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\quad A\cap B=\{1, 3\}$, $\quad A-B=\{2, 4\}$
2. $A\cup B=\{1, 3, 5, 7, 9, 21\}$, $\quad A\cap B=\{1, 5\}$, $\quad A-B=\{3, 7\}$
3. $A\cup B=A$, $\quad A\cap B=B$, $\quad A-B=\{0, -1, -2, -3\}$
4. $A\cup B=\mathbf{R}^-\cup\{2\}$, $\quad A\cap B=\{-1\}$, $\quad A-B=\{2\}$
5. $A\cup B=\mathbf{N}$, $\quad A\cap B=\emptyset$, $\quad A-B=A=\{1, 2, 3\}$
6. $A\cup B=\{1, 2, 3\}$, $\quad A\cap B=\{1, 2, 3\}$, $\quad A-B=\emptyset$
7. $A\cup B=\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$, $\quad A\cap B=\emptyset$, $\quad A-B=\emptyset$

1.4.

1. $A\cap(B\cup C)=A$, $\quad (A-B)\cap C=\{1, 3\}$, $\quad (A\cup B)-C=\{2, 6\}$
2. $A\cap(B\cup C)=\{-1, 2\}$, $\quad (A-B)\cap C=\emptyset$, $\quad (A\cup B)-C=\{-1, 0, 1\}$
3. $A\cap(B\cup C)=\mathbf{N}$, $\quad (A-B)\cap C=\emptyset$, $\quad (A\cup B)-C=\mathbf{Q}^+-\mathbf{N}$
4. $A\cap(B\cup C)=\{1\}$, $\quad (A-B)\cap C=\{1\}$, $\quad (A\cup B)-C=\mathbf{R}-\{1\}$
5. $A\cap(B\cup C)=\{0\}$, $\quad (A-B)\cap C=\{0\}$, $\quad (A\cup B)-C=\emptyset$

1.5.

1 − 5



6