

- LIMITI DI SUCCESIONI -

P1: Sia $\{a_n\}$ una successione a termini positivi.

$$\text{Se } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \implies \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

P2: Se $\{a_n\}$ è a termini positivi ed ammette limite $\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Dimostrazione P1:

Per ipotesi $\{a_n\}$ è a termini positivi, dunque anche la successione $a_1, \frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \dots, \frac{a_n}{a_{n-1}}$ è a termini positivi.

Allora, se $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, è possibile applicare P2 a questa successione, da cui segue che:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \\ \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}. \end{aligned}$$

Dimostrazione P2:

Supponiamo la tesi vera nei casi in cui

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$. Allora:

- se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a > 0$, consideriamo la successione $\left\{ \frac{a_n}{a} \right\}$. Questa è ancora a termini positivi e tende a 1 per $n \rightarrow +\infty$, quindi si ha che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{a_1}{a} \cdot \frac{a_2}{a} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{a} \implies$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}}{\sqrt[n]{a^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{a} \implies$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}}{a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{a} \implies$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

- se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, consideriamo la successione $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$. Questa è ancora a termini positivi e tende a $+\infty$ per $n \rightarrow +\infty$, quindi si ha che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a_n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

Dimostriamo ora la proposizione nel caso in

cui $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$. Dalla definizione di limite

segue che, fissato $\varepsilon > 0$, $\exists \nu \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > \nu$

vale $1 - \varepsilon < a_n < 1 + \varepsilon$. Per cui:

$$(1 - \varepsilon)^{n - \nu} < a_{\nu+1} \cdot a_{\nu+2} \cdot \dots \cdot a_n < (1 + \varepsilon)^{n - \nu}$$

$$(1 - \varepsilon)^n < (1 - \varepsilon)^{n - \nu} < a_{\nu+1} \cdot a_{\nu+2} \cdot \dots \cdot a_n < (1 + \varepsilon)^{n - \nu} < (1 + \varepsilon)^n$$

$$(1 - \varepsilon) < \sqrt[n]{a_{\nu+1} \cdot a_{\nu+2} \cdot \dots \cdot a_n} < (1 + \varepsilon)$$

$$1 - \varepsilon < \sqrt[n]{a_1} < 1 + \varepsilon \text{ perche' } \sqrt[n]{a_1} \rightarrow 1 \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow 1 - \varepsilon < \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} < 1 + \varepsilon \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

La dimostrazione nel caso in cui $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$

è analoga.