Corollario 2.57 *Sia $f \in C(I)$, I intervallo, una funzione strettamente monotona. Allora, la funzione inversa di f è continua su* $\mathrm{im}\,(f)$.

Dimostrazione Assumiamo f strettamente crescente e sia $J := \mathrm{im}\,(f)$, che, per il Corollario 2.48, è un intervallo. Allora[16] $f^{-1} : J \to I$ è strettamente crescente. Sia $y_0 = f(x_0) \in \mathrm{im}\,(f)$ con $x_0 \in I$. Per la Proposizione 2.22 esistono i limiti laterali[17]

$$\lim_{y \to y_0 -} f^{-1}(y) =: \alpha \leq \beta := \lim_{y \to y_0 +} f^{-1}(y) \ .$$

Se, per assurdo, $\alpha < \beta$ si avrebbe che tutti i punti dell'intervallo aperto (α, β), tranne al più $y_0 = f(x_0)$, non apparterrebbero a $\mathrm{im}\,(f)$ contraddicendo il punto (i) del Teorema dei valori intermedi. Quindi i limiti laterali coincidono, per cui (Proposizione 2.23), esite $\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y)$ e, per la Proposizione 2.56, tale limite coincide con $x_0 = f^{-1}(y_0)$, dimostrando la continuità di f^{-1}.
Se f è strettamente decrescente applichiamo qunto dimostrato a $-f$. ∎

[16]Esercizio 1.44.
[17]Naturalmente se y_0 è un estremo di I va considerato solo un limite laterale.