Proposizione 2.36 (Teorema ponte) *Sia $f : A \to \mathbb{R}$; $x_0 \in \mathscr{D}A$ e $L \in \mathbb{R}^*$. Allora vale la seguente equivalenza:*
$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ se e solo se presa comunque una successione $\{x_n\}$ a valori in $A\backslash\{x_0\}$ tale che $x_n \to x_0$ si ha che $f(x_n) \to L$.

Dimostrazione Assumiamo che $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ e che $\{x_n\}$ sia una successione a valori in $A\backslash\{x_0\}$ tale che $x_n \to x_0$. Sia V un intorno di L. Poiché $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) \in V$ per ogni $x \in U \cap A\backslash\{x_0\}$ e poiché $x_n \to x_0$, esiste N tale che $x_n \in U$ per ogni $n \geq N$ ed, inoltre, (essendo $\{x_n\}$ a valori in $A\backslash\{x_0\}$), si ha che $x_n \in A \cap U\backslash\{x_0\}$. Ma allora, $f(x_n) \in V$ per ogni $n \geq N$, provando che $f(x_n) \to L$.

Dimostriamo il viceversa per contrapposizione, ossia facciamo vedere che se f non tende a L per x che tende a x_0, esiste una successione $\{x_n\}$ a valori in $A\backslash\{x_0\}$ convergente a x_0 ma tale che $f(x_n)$ non converge a L. Infatti, "f non tende a L per x che tende a x_0" significa che esiste un intorno V di L tale che per ogni intorno U di x_0 esiste un $x \in U\backslash\{x_0\}$ tale che $f(x) \notin V$. Scegliamo allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, i seguenti intorni U_n di x_0:

$$U_n := \begin{cases} \left(x_0 - 1/n, x_0 + 1/n\right), & \text{se } x_0 \in \mathbb{R} \\ (n, +\infty), & \text{se } x_0 = +\infty \\ (-\infty, -n), & \text{se } x_0 = -\infty \end{cases} . \tag{2.4}$$

Quindi, per ogni n esiste[10] $x_n \in U_n\backslash\{x_0\}$ tale che $f(x_n) \notin V$ e d'altra parte (per il Teorema 2.19 del confronto) $x_n \to x_0$. ∎