ESONERO 1 – *AM110 – CL Matematica (AA 2018/19 – L. Chierchia). 9/11/2018*

Parte 1. Definizioni, semplici dimostrazioni (pt. 25)

Es 1 [Pt. 5] Enunciare gli assiomi (SO) ("somma e ordine"), (PO) ("prodotto e ordine"), (D) ("di completezza").

Es 2 [Pt. 5] Enunciare l'assioma dell'opposto; dimostrare l'unicità dell'opposto; dimostrare che $-(-x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Es 3 [Pt. 5] Definire maggiorante/minorante, massimo/minimo, estremo superiore/inferiore di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$.

Es 4 [Pt. 5] Definire $\mathbb{R}^*$; definire $\sup A$ e $\inf A$ per un qualunque insieme non vuoto $A \subseteq \mathbb{R}$.

Es 5 [Pt. 5] Dare la definizione di intorno di $x_0 \in \mathbb{R}^*$; definire il derivato di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$. Dare un esempio di insieme non limitato dal basso, con punti isolati e punti d'accumulazione.

Parte 2. Esercizi vari (75 punti)

Es 6 [Pt. 7] Si dimostri per induzione su n che $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Es 7 [Pt. 8] Sia $x > 0$ e $D := \{t > 0 |\ t^5 < x\}$. **(i)** Trovare un elemento di D e un maggiorante di D. **(ii)** Definire $\sqrt[5]{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Es 8 [Pt. 30] Per $n \in \mathbb{N}$, sia $a_n = n^2 - \sqrt{2}n$.
(i) Dimostrare che $\lim a_n = +\infty$ usando la definizione di limite e trovare $N > 0$, tale che $a_n > 10^{10}$ per ogni $n \geq N$. **(ii)** Dimostrare che $\lim a_n = +\infty$ usando l'algebra dei limiti.
(iii) Determinare il $\min\{a_n |\ n \in \mathbb{N}\}$. **(iv)** Determinare $\inf\{a_n |\ n \in \mathbb{Z}\}$ specificando se si tratta di minimo. **(v)** Determinare $\inf\{x^2 - \sqrt{2}x |\ x \in \mathbb{R}\}$ specificando se si tratta di minimo.

Es 9 [Pt. 30] Per $n \in \mathbb{N}$, sia $a_n = (-1)^n/n$ e $A = \{a_n |\ n \in \mathbb{N}\}$. **(i)** Determinare punti isolati e punti di accumulazione di A. **(ii)** Determinare $\sup A \cap (0, \frac{1}{3\sqrt{2}})$ specificando se si tratta di massimo.

Esercizio facoltativo: svolgere un punto dell'Es 10 solo dopo aver svolto tutti gli esercizi precedenti

Es 10 (i) Sia $f(x) = (1 - \sqrt{2}x)^{-2/3}$. Trovare δ tale che $|f(x) - 1)| < 10^{-10}$, per ogni $|x| < \delta$.
(ii) Sia A un insieme infinito e B un insieme numerabile. Dimostrare che $A \cup B \cong A$.

Soluzioni Es 7, 8 e 9

Es 7, (i): Se $x < 1$, $x^5 < x$ e quindi $x \in D$; se $x \geq 1$, $1/2 \in D$ essendo $(1/2)^5 < 1 \leq x$. Un maggiorante di D è $(1 + x)$, infatti se $t \in D$, $t^5 < x < (1 + x)^5$ e quindi $t < x$.
NB: il punto dell'esercizio era di definire in maniera autocontenuta la radice quinta di x...

Es 8: (i) Se $n \geq 3$, $n^2 - \sqrt{2}n = n(n - \sqrt{2}) > n$. Sia $M > 0$, $N > \max\{M, 3\}$ e $n \geq N$, allora $n^2 - \sqrt{2}n > n \geq N > M$. Se $M = 10^{10}$ possiamo, quindi, prendere $N = 10^{10}$.
NB: Naturalmente, c'erano tante altre soluzioni; ad esempio, osservando che $n(n-\sqrt{2})$ è una funzione strettamente crescente su $\mathbb{N}$; oppure studiando la parabola $x^2 - \sqrt{2}x$.
(ii) $a_n = n(n - \sqrt{2})$ e $n \to +\infty$ e $n - \sqrt{2} > 1$ per $n \geq 3$ e quindi $a_n \to +\infty$ per l'algebra dei limiti (estesa).
(iii) $a_1 < 0$ e $a_n > 0$ per $n \geq 2$, quindi il minimo è $a_1 = 1 - \sqrt{2}$.
(iv) $a_0 = 0$, e se $n < 0$, $a_n > 0$, quindi il minimo su $\mathbb{Z}$ è ancora a_1.
(v) $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 - \sqrt{2}x$ è una parabola con minimo nel vertice che ha ascissa in $x = -1/\sqrt{2}$ e quindi il minimo è $-1/2$.

Es 9: (i) ogni punto di A è isolato: se $n \in \mathbb{N}$ e $\delta_n := 1/(2(n + 1)^2)$, $(a_n - \delta_n, a_n + \delta_n) \cap A = \{a_n\}$. $a_n \to 0$ quindi $0 \in \mathcal{D}A$.
(ii) $A \cap (0, \frac{1}{3\sqrt{2}}) = \{1/(2k)|\ k \geq 3\}$ (essendo $4 < 3\sqrt{2} < 5$ e quindi $1/6 < 1/(3\sqrt{2}) < 1/4$). Quindi $\max A \cap (0, \frac{1}{3\sqrt{2}}) = 1/6$.