

NOME: \_\_\_\_\_ COGNOME: \_\_\_\_\_ MATRICOLA: \_\_\_\_\_

VALUTAZIONE:	es 1 [5]	es 2 [5]	es 3 [5]	es 4 [5]	es 5 [8]	es 6 [10]	es 7 [12]	es 8 [10]	es 9 [14]	es 10 [16]	es 11 [10]	es 12	totale

- Riportare qui sopra i dati richiesti. Vanno riconsegnati unicamente questi due fogli.
- Il punteggio totale è in centesimi; il punteggio di ogni singolo esercizio è indicato tra parentesi quadrate.
- È VIETATO: parlare, scambiarsi informazioni; consultare testi o appunti; l'uso del cellulare, calcolatrici,...
- È NECESSARIO totalizzare almeno 10 punti nei primi 5 esercizi.
- **MOTIVARE SEMPRE LE RISPOSTE:** Risposte senza giustificazioni non danno punteggio.

---

**Parte 1. Definizioni, semplici dimostrazioni (pt. 20)**

**Es 1 [Pt. 5]** Dare la definizione del numero di Eulero  $e$  e dimostrare che  $n! > (n/e)^n$ .

**Es 2 [Pt. 5]** Enunciare 3 criteri di convergenza per serie e illustrarli con esempi.

**Es 3 [Pt. 5]** Enunciare il teorema degli esistenza degli zeri per funzioni continue e darne un cenno della dimostrazione.

**Es 4 [Pt. 5]** (i) Dare la definizione (nella topologia standard di  $\mathbb{R}$ ) di insieme aperto e chiuso e dimostrare che l'unione di insiemi aperti è un insieme aperto.

(ii) Dare un esempio di un insieme chiuso che non sia unione finita di intervalli chiusi.

---

**Parte 2. Esercizi vari (80 punti)**

**Es 5 [Pt. 8]** Calcolare  $\lim \frac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^2-1} - \sqrt{n}}$ .

**Es 6 [Pt. 10]** Calcolare  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\sin^2 3x}$ .

**Es 7 [Pt. 12]** Calcolare  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\sin x} - 1}{x}$ .

**Es 8 [Pt. 10]** Calcolare massimo e minimo limite di  $\{a_n\}$  con  $a_n = (-1)^{n-1} + \sqrt{2}(-1)^n + 2^{-n}$ .

**Es 9 [Pt. 14]** Discutere la convergenza della serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\log n!)^2}$ .

**Es 10 [Pt. 16]** Studiare la convergenza, al variare di  $x$ , della serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+2^n)}{n^2+x^{2n}}$ .

**Es 11 [Pt. 10]** Studiare la continuità della funzione  $[x] - \{x\}$ .

---

**Esercizio facoltativo: svolgere un punto dell'Es 10 solo dopo aver svolto tutti gli esercizi precedenti**

**Es 12 (i)** Dare un esempio di successione da cui è possibile estrarre infinite sottosuccessioni con infiniti limiti diversi tra loro.

(ii) Discutere l'uniforme continuità di  $f(x) = x \sin x$  su  $[0, +\infty)$ .

(iii) Dimostrare che  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \sin(\sqrt{n} x)$  è uniformemente continua su  $\mathbb{R}$ .