ESONERO 1 – *AM110 – CL Matematica (AA 2019/20 – L. Chierchia). 13/11/2019*

NOME:________________ **COGNOME:**________________ **MATRICOLA:**________________

VALUTAZIONE:

Es 1 [8]	Es 2 [8]	Es 3 [8]	Es 4 [8]	Es 5 [8]	Es 6 [10]	Es 7 [16]	Es 8 [16]	Es 9 [18]	Es 10	totale

- *Riportare qui sopra i dati richiesti.* **Vanno riconsegnati unicamente questi due fogli.**
- *Il punteggio totale è in centesimi; il punteggio di ogni singolo esercizio è indicato tra parentesi quadrate.*
- *È* **VIETATO**: *parlare, scambiarsi informazioni; consultare testi o appunti; l'uso del cellulare, calcolatrici,...*
- **È NECESSARIO totalizzare almeno 26 punti nei primi 6 esercizi**.
- **L'Es 10** *va, eventualmente, fatto* **SOLO DOPO** *aver risposto a tutti gli esercizi precedenti.*
- **MOTIVARE SEMPRE LE RISPOSTE**: *Risposte senza giustificazioni non danno punteggio.*

Parte 1 (pt. 50)

Es 1 [Pt. 8] (i) Enunciare gli assiomi (SP) ("somma–prodotto"), (SO) ("somma–ordine"), (PO) ("prodotto–ordine").
(ii) Dare la definizione di $x > y$ e dimostrare usando gli assiomi che $x > y \iff \exists z > 0$ tale che $x = y + z$.

Es 2 [Pt. 8] (i) Enunciare l'assioma di completezza (D) e la "proprietà archimedea".
(ii) Dimostrare che l'insieme $A := \{4n - 10 |\, n \in \mathbb{N}\}$ non è limitato superiormente.

Es 3 [Pt. 8] (i) Definire maggiorante/minorante, massimo/minimo, estremo superiore/inferiore di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$.
(ii) Dare un esempio di insieme A tale che $\sup A = 2 \notin A$ e $\min A = -2$ (dimostrando l'affermazione fatta).
(iii) Dimostrare che $\alpha := \sup \left\{7 - \frac{1}{n^2} |\, n \in \mathbb{N}\right\} = 7 \notin A$.

Es 4 [Pt. 8] (i) Dare la definizione di $\sqrt[5]{x}$ (specificando dove interviene l'assioma di completezza). Dimostrare che $\sqrt{6} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$.

Es 5 [Pt. 8] Si dimostri che, per ogni $n \geq 1$, si ha che $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$.

Es 6 [Pt. 10] Dare la definizione di funzione strettamente crescente e dire (motivando) quale delle seguenti funzioni sono strettamente crescenti: (a) $x \in \mathbb{R} \to x^2$; (b) $x \in \mathbb{R}_+ \to \sqrt[7]{x}$;
(c) $x \in \mathbb{R}_+ \to \{x\} + 1$; (d) $x \in \mathbb{R} \to [x] + x$; (e) $x \in \{t < -1\} \to (x^2 - 1)^{-1}$.

Parte 2 (50 punti)

Es 7 [Pt. 16] Trovare, se esistono, estremo superiore e inferiore, specificando se si tratta di massimo o minimo, di $A := \left\{x > -\frac{1}{1 + |x|} \text{ tali che : } x|x| \leq \sqrt{x^2 + 10}\right\}$.

Es 8 [Pt. 16] Trovare, se esistono, estremo superiore e inferiore, specificando se si tratta di massimo o minimo, di $B := \{b_n = (-1)^n n^2 - (n - 2)^2 |\, n \in \mathbb{N}\}$.

Es 9 [Pt. 18] Sia $f(x) := \frac{x^2 - 1}{x^2 + x}$. Dimostrare che $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M > 0$ tale che $|f(x) - 1| < \varepsilon$, $\forall x \geq M$.

Es 10 (Facoltativo) (i) Dimostrare che $n^3 + n + 1 \neq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.
(ii) Trovare, se esistono, estremo superiore e inferiore, specificando se si tratta di massimo o minimo, di $C := \left\{c_n = \frac{n}{n^3 + n + 1} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Risposte: **Es 6:** (b), (d), (e). **Es 7:** $\inf A = -(\sqrt{5} - 1)/2$, $\max A = \sqrt{\frac{1+\sqrt{41}}{2}}$. **Es 8:** non è limitato né superiormente né inferiormente. **Es 10:** $\min C = 0 = c_0$, $\max C = 1 = c_{-1}$.