$x^0 := 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$

Proposizione 1.37 $\forall \ x, y \in \mathbb{R}, \ \forall \ n, m \in \mathbb{N}_0$, si ha $\quad (0^0 = 1)$

(i) $x > 0 \implies x^n > 0$

(ii) $x > 1 \implies x^{n+1} > x^n$

(iii) $x > 1, \ n > m \implies x^n > x^m$

(iv) $x > y \geq 0 \implies x^n > y^n$

(v) $0 < x < 1 \implies x^{n+1} < x^n$

(vi) $0 < x < 1, \ n > m \implies x^n < x^m$

(vii) $0 \leq x < y \implies x^n < y^n$.

Tutto elementare Dimostrazioni per esercizio

(i) Per induzione su $n \in \mathbb{N}_0$. Per $n = 0$ $x^0 = 1 > 0$

Assumiamo che $x^n > 0$; $x^{n+1} := \underset{\vee\!/\, 0}{x} \cdot \underset{\vee\!/\, 0}{x^n} \overset{(P0)}{\geq} 0$

Inoltre $x \neq 0$ per ipotesi e $x^n \neq 0$ per ipotesi induttiva $\Rightarrow \underline{x \cdot x^n \neq 0}$

Inoltre $x \neq 0$ per ipotesi e $x^n \neq 0$ per ipotesi induttiva $\Rightarrow \underline{x \cdot x^n \neq 0}$

$\Rightarrow x \cdot x^n > 0$

(ii) Per induzione. $n=0$ è vero banalmente. Assumiamo $\underline{x^{n+1} > x} \; (> 1 > 0)$

$$x^{n+2} := \underbrace{x^{n+1}}_{=a} \cdot x \overset{?}{>} \underbrace{x^{n+1}}_{=a} \qquad a = x^{n+1} > 0$$

N.B. $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$ (deriva da (S0) e $a \neq b$)

$$\rightarrow \underline{a x \overset{?}{>} a \overset{(S0)}{\Longleftrightarrow} a x - a > 0} \Longleftrightarrow a(x-1) > 0$$

(iii) $x > 1$, $\underline{n > m} \Rightarrow x^n > x^m$. $\forall n, m \in \mathbb{N}_0$

Induzione su $n \geq m+1$ $\quad x^{m+1} > x^m$ (per (ii))

Assumiamo vero $x^n > x^m$. Allora $x^{n+1} := x \, x^n \underset{\text{e } x>1}{>} x \cdot x^m \underset{x>1}{>} x^m$

Abbiamo usato più volte

(*) $a > 0$ $\underline{c > d} \Rightarrow ac > ad$

(**) $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$

(S0) $a \geq b \Leftrightarrow a - b \geq 0$

(S_0)

$$\left.\begin{array}{l} a \geq b \iff a-b \geq 0 \\ a \neq b \iff a-b \neq 0 \end{array}\right\} \iff (**)$$

$$ac \geq ad \overset{(S_0)}{\iff} ac - ad \geq 0 \overset{(SP)}{\iff} \underline{a(c-d) \geq 0} \overset{(PO)}{\Longleftarrow} \begin{cases} \underline{(c-d) \geq 0} \\ \underline{a \geq 0} \end{cases}$$

Completare a casa (o con tutori / esercitazioni etc.)

Es. 1.18

$y \neq 0 \quad (y^{-1})^n = \underline{\underline{(y^n)^{-1}}}$ ossia $\left(\frac{1}{y}\right)^n = \frac{1}{y^n}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Userò il fatto che se $ab = 1 \implies b = a^{-1}$.

$$\underbrace{y^n}_{c} \cdot \underbrace{(y^{-1})^n}_{d} = (y \cdot y^{-1})^n = 1^n = 1. \implies (y^n)^{-1} = (y^{-1})^n.$$

$a^n b^n = (ab)^n$

[illegible] usando l'induzione.

Dimostrazione alternativa usando l'induzione.

$n = 0, 1$ è vero.

Assumiamo $(y^{-1})^n = (y^n)^{-1}$

$$(y^{-1})^{n+1} := (y^{-1})^n \cdot y^{-1} =$$

$$= (y^n)^{-1} \cdot y^{-1} = (y^n \cdot y)^{-1} = (y^{n+1})^{-1}$$

$$(ab)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$$