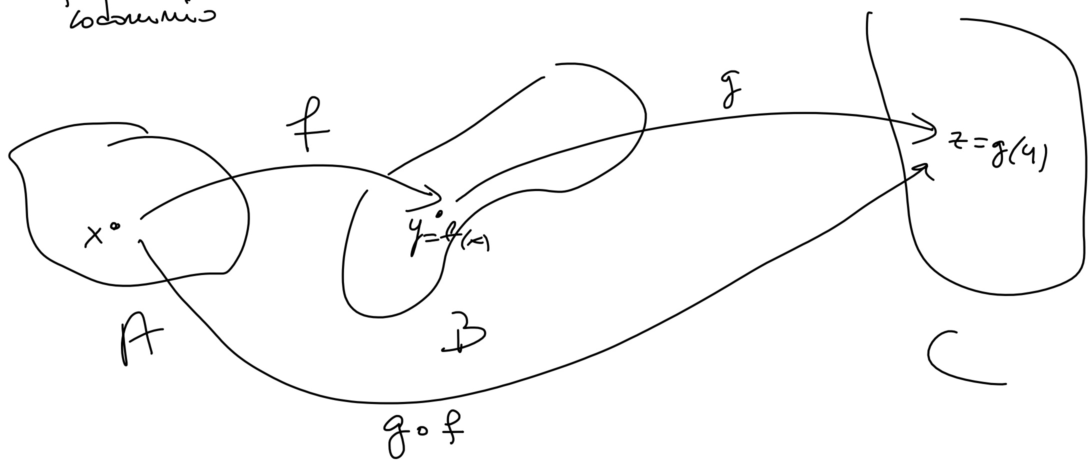
INSIEMI FINITI E INFINITI

martedì 13 ottobre 2020 15:45

$f: A \to B$ $\quad g: B \to C$, A, B, C insiemi non vuoti

A ← dominio, B ← codominio



DEF $g \circ f : A \to C$ $\quad g \circ f(x) = g\left(f(x)\right)$

ES. e^{-x^2}

$$x \xrightarrow{f} x^2 \xrightarrow{g} -x^2 \xrightarrow{h} e^{-x^2}$$

$f(x) = x^2$ $\quad g(y) = -y$ $\quad h(z) = e^z = \exp(z)$

FUNZIONI INIETTIVE, SURIETTIVE, BIUNIVOCHE

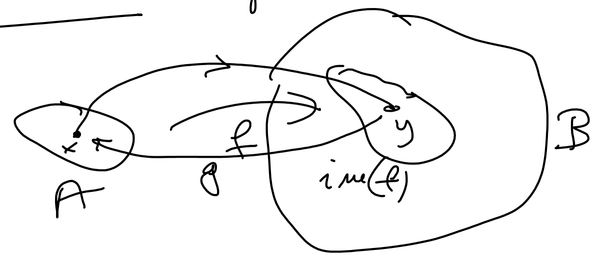
DEF. $f: A \to B$ si dice iniettiva se $f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$ o equiv. $x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$

$f: A \to B$ " " suriettiva se $im(f) = B$ ossia se $\forall\, y \in B, \exists\, x \in A \mid f(x) = y$

$f: A \to B$ " " biunivoca se è iniettiva e suriettiva se $\forall\, y \in B\ \exists!\, x \in A \mid f(x) = y$

Le funzioni iniettive sono invertibili: cioè se $f: A \to B$ è iniettiva
possiamo definire la funzione INVERSA di f: $g: \mathrm{im}(f) \to A$ | $y \in \mathrm{im}(f) \iff \exists!\, x \in A \mid f(x)=y$

$g(y) := x$



$$\begin{cases} g \circ f(x) = x \\ g \circ f = id \\ f \circ g(y) = y \\ f \circ g = id. \end{cases}$$

La funzione inversa g si denota con f^{-1} (da non confondere $\frac{1}{f}$)

Def. 1) Diremo che A è equipotente a B o che A e B hanno la stessa CARDINALITÀ,
$A \cong B$, se $\exists\ \phi: A \to B$ biunivoca ($A \overset{\phi}{\cong} B$)

A è equip a B e ϕ è una applicazione biunivoca tra A e B

2) Dato $n \in \mathbb{N}$ sia $\mathcal{F}_n := \{k \in \mathbb{N} \mid k \le n\}$ ($\mathbb{F}_n$), $\mathcal{F}_3 = \{1,2,3\}$

Diremo che A è FINITO se $A \cong \mathcal{F}_n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$.

3) Un insieme A si dice NUMERABILE se $A \cong \mathbb{N}$

4) Un insieme A è INFINITO se non è finito.

OSS La relazione $A \cong B$ è una relazione di equivalenza ossia

(i) $A \cong A$ ($A \overset{id}{\cong} A$)

(ii) $A \overset{\phi}{\cong} B \Rightarrow B \overset{\psi}{\cong} A$ — $B \overset{\phi^{-1}}{\cong} A$

(iii) $A \overset{\phi}{\cong} B,\ B \overset{\psi}{\cong} C \Rightarrow A \overset{\psi \circ \phi}{\cong} C$

Prop $\mathbb{N}$ è infinito.

Dim Supponiamo per assurdo che $\mathbb{N}$ sia finito. Quindi $\exists\, n \mid \mathcal{F}_n \cong \mathbb{N}$

ossia $\exists\ \phi: \mathcal{F}_n \to \mathbb{N}$, ossia $\forall\ 1 \le j \le n\ \ \exists!\ \phi_j \in \mathbb{N}$

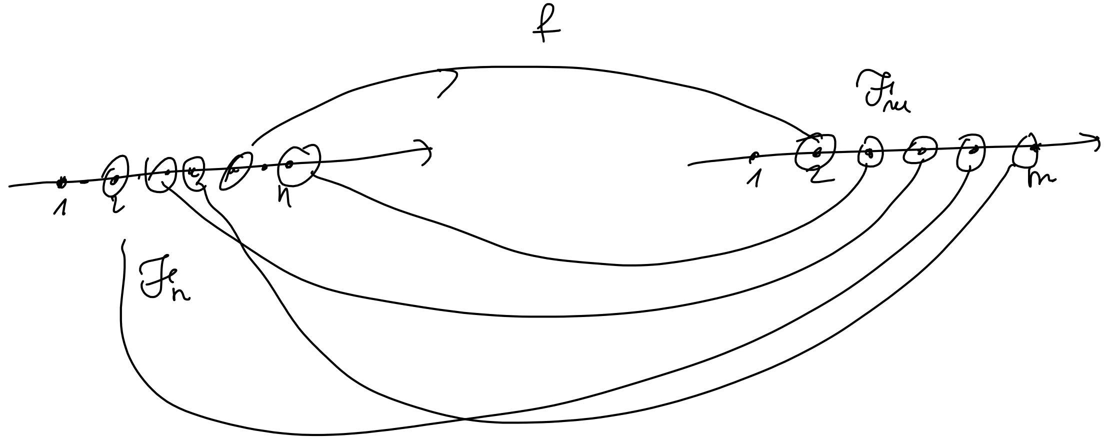
$$N := \sum_{j=1}^{n} \phi_j \quad , \text{ ovviamente } \underline{N+1} > \phi_j \quad \forall\, j \qquad \left(\phi_j \le \sum_{k=1}^{n} \phi_k < N+1\right)$$

in particolare $\underline{N+1} \ne \phi_j ,\ \forall\, j$ ma allora ϕ non è suriettiva $\left(N+1 \in \mathbb{N},\ N+1 \ne \phi_j,\ \forall j \in \mathcal{F}_n\right)$ $N+1 \notin \operatorname{im}(\phi)$.

CONTRADD. $\blacksquare$

Lemma 1.50 (**) (Siano $n, m \in \mathbb{N}$ e) Sia $f: \mathcal{F}_n \to \mathcal{F}_m$ suriettiva. Allora $\underline{n \ge m}$

$(\forall\ 1 \le j \le m\ \exists\ 1 \le k \le n \mid f(k) = j)$



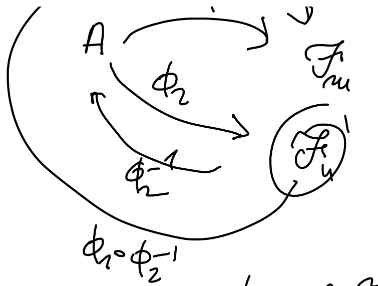
Corollario (i) $\phi: \mathcal{F}_n \to \mathcal{F}_m$ è biunivoca $\Rightarrow n = m$

(ii) Se A è finito $\exists!\ n \in \mathbb{N} \mid A \cong \mathcal{F}_n$

Dim (i) ϕ è suriettiva $\overset{\text{lemma}}{\Rightarrow}$ $n \ge m$; ma anche ϕ^{-1} è suriettiva $\overset{\text{lemma}}{\Rightarrow}$ $m \ge n$ $\Rightarrow m = n$

ϕ $\quad\phi_1\quad$ (ii)

(ii) $\underline{\underline{A \overset{\phi_1}{\cong} \mathcal{F}_n}}$ e $\underline{\underline{A \overset{\phi_2}{\cong} \mathcal{F}_m}}$



Allora $\phi_1 \circ \phi_2^{-1} : \mathcal{F}_m \to \mathcal{F}_n \Longrightarrow n=m$

è biunivoca.

DEF. Se A è finito, l'unico $n \in \mathbb{N}$ / $A \cong \mathcal{F}_n$ definisce la cardinalità di A.

$\#A = n$

Proposizione 1.53 (**)

(i)(**) $\emptyset \neq F \subseteq \mathcal{F}_n \Longrightarrow F$ è finito e $\#F \leq n$

(ii) $\emptyset \neq B \subseteq A$ e A è finito $\Longrightarrow B$ è finito e $\#B \leq \#A$

(iii) Se A è finito, $\#A \geq 2$, $a \in A$ allora $B := A \setminus \{a\}$ è finito e $\#(A \setminus \{a\}) = \#A - 1$

(iv) $\emptyset \neq B \subsetneq A$ e A è finito $\Longrightarrow B$ è finito e $\#B < \#A$

(v) $\emptyset \neq B \subsetneq A$ e A è finito $\Longrightarrow \nexists\ \phi : B \to A$ biunivoca

---

Altra dimostrazione che $\mathbb{N}$ è infinito.

Sia $\phi : n \in \mathbb{N} \mapsto \phi(n) = n+1$

ovviamente ϕ è iniettiva $\phi(n) = \phi(m) \iff n+1 = m+1 \iff n = m$

$\mathrm{Im}(\phi) = \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq 2\} = \mathbb{N} \setminus \{1\} \subsetneq \mathbb{N}$

$\boxed{\mathbb{N} \overset{\phi}{\cong} \mathbb{N} \setminus \{1\}} \xRightarrow{\text{Prop 1.53-(v)}} \mathbb{N}$ è infinito.

Oss.

Lemma 1.56 A è infinito $\iff$ $\exists$ una funzione iniettiva $\phi : \mathbb{N} \to A$ | $\mathbb{N} \overset{\phi}{\cong} \phi(A) \subseteq A$

$\phi(A)$ numerabile

Dim $\Leftarrow$ Supp. p.a. che A sia finito $\Rightarrow$ $B := \phi(\mathbb{N}) \subseteq A$

per la Prop 1.53-(ii) $\Rightarrow$ B sarebbe finito $\mathbb{N} \overset{\phi}{\cong} B$ $\Rightarrow$ $\mathbb{N}$ finito contradd !

$\Rightarrow$ fisso $a \in A$, $\phi(1) = a$, $\underbrace{A \setminus \{\phi(1)\}}_{A_1}$ è infinito $\exists$ $b \in A \setminus \{\phi(1)\}$

e definisco $\phi(2) = b$, $A_2 := A_1 \setminus \{b\} = A \setminus (\{a\} \cup \{b\})$, A_2 è infinito $\Rightarrow \exists\, c \in A_2$

$\phi(3) = c$, posso iterare $\phi(n) \neq \phi(j)$ $\forall\, j < n$

$\Rightarrow$ ϕ è iniettiva $\phi : \mathbb{N} \to A$

N.B. Qui abbiamo usato un assioma logico noto che si chiama

ASSIOMA DELLA SCELTA Data una famiglia X di insiemi non vuoti

esiste una funzione di scelta.

$$\alpha \quad A \in X \longmapsto \alpha(A) \in A.$$

dominio codominio

("Dedekind")

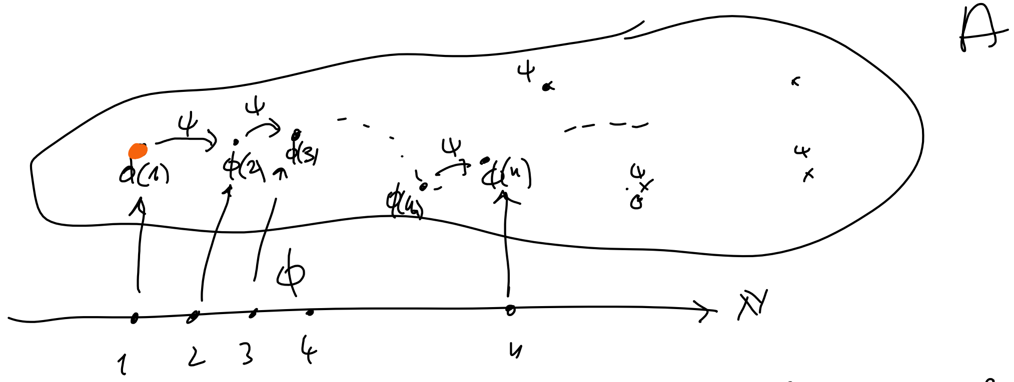
Proposizione A è infinito $\iff$ $\exists$ una funzione biunivoca da A su un suo sottoinsieme proprio.

Dim. "$\Rightarrow$" Per il Lemma 1.56 $\exists$ $\phi : \mathbb{N} \to A$, ϕ iniettiva

$\phi(n+1)$, $a \in \phi(\mathbb{N}) \iff a = \phi(n)$ per un $n \in \mathbb{N}$

$\psi : a \in A \mapsto \psi(a) := \begin{cases} a, & a \notin \phi(\mathbb{N}) \end{cases}$

Allora ψ è biunivoca da A in $A \setminus$



$\phi(1) \notin \psi(A)$

"$\Leftarrow$" se $\exists$ una funzione biunivoca da A su un suo sottoinsieme proprio $\Longrightarrow$ A non può essere finito (proposizione prop 1.5.3)

$\mathbb{Z} \simeq \mathbb{N}$ $\qquad$ $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \underbrace{-\mathbb{N}}_{\{-n \mid n \in \mathbb{N}\}}$

$-2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2$

$a_5 \quad a_3 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_4$

$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{R} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \right\}.$ $\qquad$ $\frac{p}{q} = p \cdot \underline{\underline{q^{-1}}}$

$\boxed{\mathbb{Q} \simeq \mathbb{N}}$

Definisco $E_0 := E_0 = \{0\}$, $\quad n \in \mathbb{N}$ $\qquad E_n = \left\{ \frac{p}{q} \mid q \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{Z},\ q \le n,\ \underline{\underline{|p| \le n}} \right\}$

$E_3 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -1\}$,

$F_n := E_n \setminus E_{n-1}$

$E_n \subsetneq E_{n+1}$

$F_n \cap F_m = \emptyset$ se $n \neq m$

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} E_n = \boxed{\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0}} F_n = \mathbb{Q}\cap[-1,1]}$

F_n sono insiemi finiti

$F_0 = \{0\}$, $r_0 := 0$

$F_1 = \{1,-1\}$, $r_1 = 1$, $r_2 = -1$

$F_2 = \{\dots\}$

$E_1 \setminus E_0 = \{1, 0, -1\} \setminus \{0\} = \{1, -1\}$

$\{r_n \mid n\in\mathbb{N}\} \cong \mathbb{Q}\cap[-1,1]$