ALGEBRA DEI LIMITI

Lemma $f,g: A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0\in \mathcal{D}^*A$. Assumiamo che f sia limitata vicino a x_0 e che $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$. Allora $\underbrace{\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=0}$.

Ricorda: "f limitata vicino a x_0" $\overset{def}{\iff}$ $\exists\, M>0$ e un intorno U_1 di x_0 $\mid$ $|f(x)|\le M$ $\forall\, x\in U_1\cap A\setminus\{x_0\}$

$x\neq x_0$

Dim del lemma. $\exists\, M, U_1$ t.c. $|f(x)|\le M$ $\forall\, x\in U_1\cap A\setminus\{x_0\}$

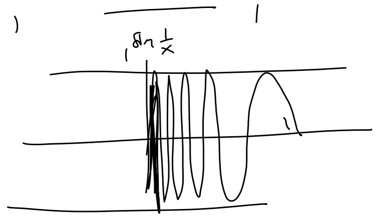
Sia $\varepsilon>0$. Poiché $g\to 0$ per $x\to x_0$ $\exists\, U_2 \mid |g(x)|<\frac{\varepsilon}{M}$, $\forall\, x\in U_2\cap A\setminus\{x_0\}$

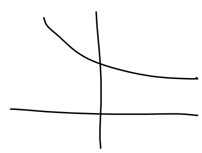
Sia $U = U_1\cap U_2$ (so che è un intorno di x_0). Quindi se $x\in U\cap A\setminus\{x_0\}$

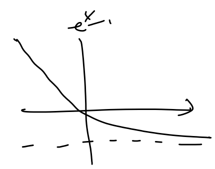
$$|f(x)g(x)| = |f(x)|\cdot|g(x)| < \frac{\varepsilon}{M}\cdot M = \varepsilon. \quad\blacksquare$$

Es. $x\{x\}\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, $0\le\{x\}\le 1$, $x\to 0$ per $x\to 0$ $\implies \lim_{x\to 0} x\cdot\{x\}=0$

$$\lim_{x\to 0}\left(e^x-1\right)\left(\sin\frac{1}{x}\right)=0$$







$\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le 1$, $\forall\, x\neq 0$. $e^x-1\to 0$ per $x\to 0$

Dato $\varepsilon>0$ trovare $\delta \mid \left|(e^x-1)\sin\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$ $\forall$ $0<|x|<\delta$. Questo è un esercizio non immediato.

Proposizione (algebra dei limiti finiti)

Siano $f,g: A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $a,L,M\in\mathbb{R}$, $x_0\in\mathcal{D}^*A$ e assumiamo che $\lim_{x\to x_0} f=L$, $\lim_{x\to x_0} g=M$. Allora

(i) $\lim_{x\to x_0} af = aL$ } "linearità del limite"

(ii) $\lim_{x\to x_0} (f+g) = L+M$

(iii) $\lim_{x\to x_0} fg = LM$

(iv) Se $M\neq 0$ vicino a x_0, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g} = \frac{L}{M}$

(v) Se $f\le g$ vicino a x_0 $\implies$ $L\le M$ ("secondo teorema del confronto")

$\iff \lim |af-aL| = 0$. $\left(\lim f(x)=L \iff \lim |f(x)-L|=0\right)$

Dim (i) $\lim_{x\to x_0} af = aL$ $\quad x\to x_0 \quad$ ($x\to x_0 \quad \hat{\mathbb{R}} \quad x\to x_0$)

$$|\underset{=}{a}(\underbrace{f-L}_{})|$$

Segue dal lemma, con $f\equiv a$, $g=f-L$ $\quad f \uparrow \quad \uparrow g$

(ii) $\quad |(f+g)-(L+M)| = |(f-L)+(g-M)| \leq |f-L| + |g-M| < \varepsilon$

Sia $U_1 \mid |f(x)-L| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall x\in (U_1\cap A)\setminus\{x_0\}$, $U_2 \mid |g(x)-M| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall x\in (U_2\cap A)\setminus\{x_0\}$

Sia $U := U_1\cap U_2$ $\qquad \forall x\in U\cap A\setminus\{x_0\}$.

(Esempio se $U_1 = |x-x_0|<\delta_1$, $U_2 = |x-x_0|<\delta_2$ $(x_0\in\mathbb{R})$

$\Rightarrow \delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$ se $x_0=+\infty$ f,g successioni

$U_1 = (N_1,+\infty)$, $U_2 = (N_2,+\infty)$, $N=\max\{N_1,N_2\}$)

(iv) $\quad \left|\frac{f}{g} - \frac{L}{M}\right| = \frac{|fM-Lg|}{|gM|}$

$M\neq 0$, Osservo dal teorema di permanenza del segno, $g\neq 0$ vicino a x_0.

$g\to M\neq 0$ $\quad$ Per la prop 117 (ii), vicino a x_0, $|g|\geq \frac{|M|}{2} \iff \frac{1}{|g|}\leq \frac{2}{|M|}$

osservo che $\frac{1}{g}$ è limitata vicino a x_0

$(fM-Lg)\to 0$ per il punto (i)-(ii) e $\frac{1}{Mg}$ è limitata vicino a x_0

$$\underset{LM}{\downarrow}\ \ \underset{LM}{\downarrow}$$

per il lemma $\frac{f}{g}-\frac{L}{M}\to 0$. per $x\to x_0$

(iii) $\quad |fg-LM| = |(f-L+L)g-LM| = |(f-L)g+L(g-M)|$

$$\leq \underbrace{|(f-L)|}_{\substack{\downarrow x\to x_0 \\ 0}}\underset{\substack{\uparrow \\ g \text{ è limitata} \\ \text{vicino a } x_0}}{|g|} + \underbrace{|L||g-M|}_{\substack{\downarrow x\to x_0 \\ 0}} \qquad f-L\to 0,\ g-M\to 0$$

(v) Sia $\varepsilon>0$. $\exists U$ | (1) $L-f(x) < \frac{\varepsilon}{2}$ e

(2) $g(x)-M<\frac{\varepsilon}{2}$, $\forall x\in U\cap A\setminus\{x_0\}$

Quindi per tale x

$$L \overset{(1)}{<} f(x)+\frac{\varepsilon}{2} \leq g(x)+\frac{\varepsilon}{2} < M+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = M+\varepsilon$$

Ho dimostrato che $\forall \varepsilon>0$ $\quad \boxed{\overset{\forall \varepsilon>0}{L<M+\varepsilon} \iff L\leq M}$

ESERCIZIO.

" $\Leftarrow$ " $\quad L\leq M < M+\varepsilon$

$\Updownarrow$

OSS Se $P_1,\dots,P_n$ sono proprietà vere vicino a x_0

allora $\exists$ U intorno di x_0 t.c. P_i sono vere $\forall x\in U\setminus\{x_0\}$ $\forall 1\leq i\leq n$

$\exists U_i \mid P_i$ è vera per $x\in U_i\setminus\{x_0\}$

$U = U_1\cap\dots\cap U_n$.

$\varepsilon > 0$

"$\Rightarrow$" P.a. $L > M$. $L - M > 0$ $\quad \varepsilon = L - M \Rightarrow$ Contraddizione

$L < M + \varepsilon \quad L - M < \varepsilon = L - M$ che è assurdo.

ESTENSIONE PARZIALE DELL'ALGEBRA DEI LIMITI AL CASO IN CUI $L, M \in \overline{\mathbb{R}}^*$

Proposizione 2.27 $f, g : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{D}^* A$; $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$. Assumiamo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \{\pm\infty\}$

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = +\infty$ se $\begin{cases} L = +\infty & \text{e } g > a \text{ vicino a } x_0 \\ L = -\infty & \text{e } g < -a \text{ " "} \end{cases}$

(ii) $\lim_{x \to x_0} fg = -\infty$ se $\begin{cases} L = +\infty & \text{e } g < -a \text{ " "} \\ L = -\infty & g > a \text{ " "} \end{cases}$

(iii) $\lim_{x \to x_0} \frac{g}{f} = 0$ se $|g| < a$ " "

(iv) $\lim_{x \to x_0} f + g = +\infty$ se $L = +\infty$ $\quad g > b$ " "

(v) $\lim_{x \to x_0} f + g = -\infty$ se $L = -\infty$ $\quad g < b$ " "

Dim (i) Dato $M > 0$. $f(x) g(x) \geq M$

vicino a x_0 $f g > f \cdot a \geq M$ $\quad$ Scelgo $U \mid g > a$ per $x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$

e $f > \frac{M}{a}$ " "

$\Downarrow$

$a f > M$.

(l'altro caso segue osservando che
$f g = (-f)(-g)$ $\quad (-f \to -\infty$ e $-g > a$ vicino a $x_0)$

(ii)

Ipot. $f \to +\infty$ e $g < -a$ vicino a x_0

$f g = -\underbrace{\left(f(-g)\right)}_{\downarrow\, -\infty}$; $-g > a$ vicino a x_0 $\Rightarrow$ $f(-g) \to +\infty$

$(f \to +\infty, \quad -f \to -\infty)$

(iii) $\frac{g}{f} \to 0$ se $f \to \pm\infty$ e $|g| < a$ vicino a x_0

Oss. $\frac{1}{f} \to 0 \Leftrightarrow \frac{1}{|f|} \to 0$ ma $|f| \to +\infty$ $\quad \left(\varepsilon = \frac{1}{M} \quad |f| > M, \ \frac{1}{|f|} < \frac{1}{M} = \varepsilon \right)$

$$\underbrace{g}_{\text{limitata}\uparrow} \ \underbrace{\frac{1}{|f|}}_{\downarrow 0} \to 0 \quad \text{per il lemma.}$$

(iv) $f+g \to \infty$ se $L = +\infty$ e $g > b$

Sia $M>0$ $\quad f+g > M$ voglio che

$$f+g > f+b > M \iff \underline{f} > M-b \quad \text{vero vicino a } x_0.$$

Def. $f, g : A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in \mathcal{D}^*A$. f SI COMPORTA COME g vicino a x_0

e scriveremo $f \sim g$ vicino a x_0 (per $x \to x_0$)

$\iff$ se $g \neq 0$ vicino a x_0 e $\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g} = 1$

Oss. Se $\underline{f \sim 1}$ vicino a x_0 allora

$$\lim_{x\to x_0} f h = \lim_{x\to x_0} h \qquad \left(\lim fh \ \exists \iff \exists \lim h \right)$$

Infatti se $\underline{\lim_{x\to x_0} h}\ \exists$ in $\mathbb{R}^*$ $\Rightarrow$ $\underline{\lim f \cdot \underline{h} = \lim h}$ per l'algebra dei limiti

Se il limite $\nexists \iff \nexists \lim fh$ perché se esistesse

$$\lim fh = L \Rightarrow \overbrace{\underset{\substack{\downarrow\\1}}{\frac{1}{f}} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\L}}{fh}}^{h} \to L \quad \text{contraddizione}$$

Esempi

$$\underset{\substack{\uparrow\\\text{pol. di grado } n}}{f(x)} = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad (a_n \neq 0), \qquad \underset{\substack{\uparrow\\\text{polinomio di grado } m}}{g(x)} = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k, \quad b_m \neq 0.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f}{g} = \lim \frac{\sum_0^n a_k x^k}{\sum_0^m b_k x^k} = \lim \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_0}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} x^{n-m} \cdot \frac{\boxed{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n}} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} a_n}{b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \dots + \frac{b_0}{x^m} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} b_m}$$

$$= \frac{a_n}{b_m} \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} x^{n-m}}$$

Es $\quad x_0 = +\infty \quad f = n^2+8, \ g = 3n^2-1$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+8}{3n^2-1} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+8}{3n^2-1} = \frac{1}{3}$$

$$\left| \frac{n^2+8}{3n^2-1} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{\cancel{3n^2}+24-\cancel{3n^2}+1}{3\,(3n^2-1)} \right| = \frac{25}{3}\ \frac{1}{3n^2-1} < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \frac{3}{25}\,(3n^2-1) > \frac{1}{\varepsilon} \qquad \frac{3}{25}\,(3n^2-1) \geq \frac{3}{25}\cdot 2n^2 \qquad \begin{array}{l} 3n^2-1 \geq 2n^2 \\ n^2 \geq 1 \end{array}$$

$$n^2 > \frac{25}{6}\ \frac{1}{\varepsilon} \Longleftrightarrow n > \frac{5}{\sqrt{6\varepsilon}} = N.$$

$$a_n = \frac{n^3 - 5n + 10}{n+1} \qquad A = \{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \}$$

(i) $\boxed{a_n \geq 3}$, $\forall\ n \geq 3$

$$\longrightarrow \quad a_n - 3 \overset{?}{\geq} 0 \qquad \frac{n^3-5n+10}{n+1} - 3 = \frac{n^3-5n+10-3n-3}{n+1} = \frac{n^3-8n+7}{n+1} \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underbrace{n^3 - 8n + 7}_{\parallel} \geq 0$$

$$n\,(n^2-8)+7 \underset{\substack{\uparrow \\ \forall n \geq 3}}{\geq} n+7 > 0.$$

(ii) $\Longleftrightarrow$ $a_1 = 3$, $a_2 = \frac{8}{3}$ $\qquad \min A = a_2 = \frac{8}{3}.$

a_n non è limitata superiormente

$$\forall M \geq 2, \quad \frac{n^3-5n+10}{n+1} \geq M \qquad \frac{n^3-5n+10}{n+1} = \frac{n^3\,\overbrace{\left(1-\frac{5}{n^2}\right)}^{}+10}{n+1}$$

$$n \geq 3 \qquad 1 - \frac{5}{n^2} \geq 1 - \frac{5}{9} \qquad \frac{5}{9} \geq \frac{5}{n^2} \Longleftrightarrow n^2 \geq 9 \Longleftrightarrow n \geq 3$$

$$\geq \frac{n^3\,\left(1-\frac{5}{9}\right)+10}{n+1} = \frac{\frac{4}{9}n^3+10}{n+1} > \frac{\frac{4}{9}\,n^3}{n+1} \geq \frac{\frac{4}{9}\,n^3}{2n} = \frac{2}{9}\,n^2$$

$$3^n > n^3 \qquad \forall n \geq N$$

$3^4 = 81 > 64$ ✓ $n = 4$

Per Induktion