SOTTOSUCCESSIONI

Def Data una successione $\{a_n\}$ una sua sottosuccessione o SUCCESSIONE ESTRATTA è una successione $\{b_k\}$ della forma $b_k = a_{n_k}$ dove n_k è una successione a valori in $\mathbb{N}$ e strettamente crescente.

$n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n_{k+1} > n_k$

$a = \{a_n\}$, $n \in \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

$b_k = a_{n_k} = (a \circ b)_k$

Oss. (i) $n_k \nearrow +\infty$ stando $n_k \geq k$ $\forall k$ (per induzione: $n_1 \in \mathbb{N}$ $n_1 \geq 1$ ✓

se $n_k \geq k$ $n_{k+1} > n_k \geq k \Rightarrow n_{k+1} \geq k+1$ ✓.)

(ii) Se $a_n \to L \in \mathbb{R}^*$ $\Rightarrow$ $a_{n_k} \to L \in \mathbb{R}^*$ $\forall a_{n_k}$ sottosucc di a_n

(segue dal teorema ponte)

Esempi (1) $a_n = (-1)^n$

$n_k = 2k$ $a_{n_k} = (-1)^{2k} = 1 \to 1$, $n_k := 2k+1$ $(-1)^{n_k} = -1 \to -1$

($f(x)$, $n(k) = n_k$)

Es Sia $\{\varepsilon_k\}$ una qualunque successione a valori in $\{-1, 1\}$

$\exists\, n_k :$ $\varepsilon_k = (-1)^{n_k}$ (sugg. definire n_k ricorsivamente)

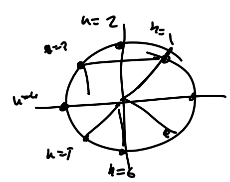
---

(2) $\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$ Valori di $\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$, $E = \mathrm{Im}\left(n \to \sin n\frac{\pi}{4}\right)$

($\underset{n}{f} = f(x) \in \mathbb{R}$
$\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$)

$$\boxed{E = \left\{ \underset{n=1}{\frac{\sqrt{2}}{2}},\ \underset{n=2}{1},\ \underset{n=3}{0},\ \underset{n=4}{-\frac{\sqrt{2}}{2}},\ \underset{n=5}{-1} \right\}}$$

$L_1 \quad L_2 \quad L_3 \quad L_4 \quad L_5$



Es trovare sottosuccessioni $n_k^{(1)}, n_k^{(2)}, n_k^{(3)}, n_k^{(4)}, n_k^{(5)}$ | $\sin\left(n_k^{(5)}\frac{\pi}{4}\right) \to L_5$

Per esempio

$L_3 = 0$ $\sin\left(n_k^{(3)} \frac{\pi}{4}\right) \to 0$

infatti possiamo trovare una successione $n_k^{(3)}$ | $\sin\left(n_k' \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$$\sin\left(n \frac{\pi}{4}\right) = 0 \iff n\frac{\pi}{4} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$n = 4k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \underline{\underline{n_k^{(3)} = 4k}}$$

Lemma Sia $\{a_n\}$ una successione non limitata superiormente [inferiormente]. Allora $\exists$ una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ strett. crescente t.c. $a_{n_k} \to +\infty$

Dim Costruiamo n_k in maniera ricorsiva. Sia $n_1 \in \mathbb{N}$ | $a_{n_1} > 1$

$(\forall M \ \exists n \mid a_n > M)$. Consideriamo il $\max\{2, a_{n_1}\} < M \in \mathbb{R}$

$\exists \ n_2 > n_1 \mid a_{n_2} > M \Rightarrow \underline{a_{n_2} > a_{n_1}}, \ a_{n_2} > 2$

Analogamente possiamo trovare $n_k \in \mathbb{N}$ |

$a_{n_{k+1}} > \max\{k+1, a_{n_k}\} \Rightarrow a_{n_{k+1}} > a_{n_k}, \ \forall k$ e $a_{n_{k+1}} > k+1 \to +\infty$.

Attenzione: a_n non limitata superiormente $\iff$

$\forall N \in \mathbb{N}, \forall M > 0 \quad \exists \ n > N \mid \underline{\underline{a_n > M}}$

infatti la negazione di questa frase è

$\exists N \in \mathbb{N}, \exists M \mid \forall n \geq N, \ \underline{\underline{a_n \leq M}}$

Teorema di BOLZANO-WEIERSTRASS !!

Da ogni successione $\{x_n\}$ ($x_n \in \mathbb{R}$) è possibile estrarre una sottosuccessione regolare (ossia $\exists \ n_k \mid x_{n_k} \to L \in \mathbb{R}^*$)

Corollario se $\{x_n\}$ è una qualunque successione limitata $\Rightarrow \exists \ x_{n_k} \to L \in \mathbb{R}$.

Infatti sia $x_{n_k} \to L \in \mathbb{R}^*$, ma x_n limitata $\iff \exists \ M > 0 \mid |x_n| \leq M \ \forall n$

$M \geq |x_{n_k}| \to |L| \Rightarrow |L| \leq M \Rightarrow L \in \mathbb{R}$.

Dim (metodo di bisezione)

Se x_n non è limitata $\Rightarrow x_n$ è non limitata sup. o inf.

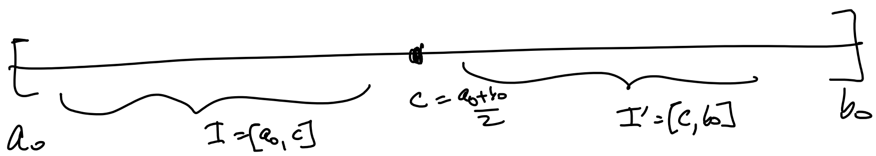
in entrambi i casi per il lemma $\exists \ n_k \mid x_{n_k} \to +\infty \ [-\infty]$

se non limit. sup — non limitata inf

Supponiamo ora che $\{x_n\}$ sia limitata $\Rightarrow$

$\exists -\infty < a \leq b < \infty \mid a \leq x_n \leq b, \ \forall n$ (se $a = b \Rightarrow x_n \equiv a = b \Rightarrow$ convergente ✓)

Sia $a < b$. Sia $I_0 := [a_0, b_0]$ $a_0 = a$, $b_0 = b$



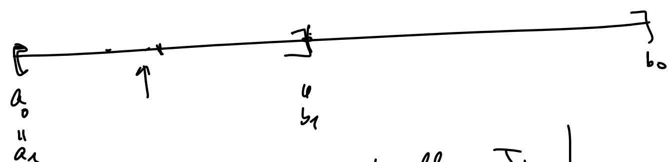
e sia $\mathcal{N} := \{n \mid x_n \in I\}$ e $\mathcal{N}' := \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in I'\}$

$\mathcal{N} \cup \mathcal{N}' = \mathbb{N} \Rightarrow$ uno dei due insiemi $\mathcal{N}, \mathcal{N}'$ è infinito

Sia tale insieme $\mathcal{N}_1$ e chiamiamo I_1: $\mathcal{N}_1 = \{n \mid x_n \in I_1\}$

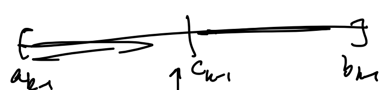
$\left(\begin{array}{l} \text{se } \#\mathcal{N} = +\infty \Rightarrow \mathcal{N}_1 = \mathcal{N} \text{ e } I_1 = I \\ \text{se } \#\mathcal{N}' = +\infty \Rightarrow \mathcal{N}_2 = \mathcal{N}' \text{ e } I_2 = I' \end{array} \right)$, $I_1 = [a_1, b_1]$

Iterazione:



ripeto la stessa costruzione e ottengo un intervallo I_k |

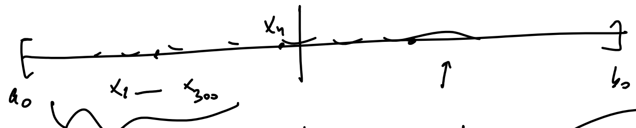
$$\left\{ \begin{array}{l} |I_k| = \dfrac{|I_{k-1}|}{2} \\ I_k = [a_k, b_k], \quad a_{k-1} \le a_k < b_k \le b_{k-1} \\ \mathcal{N}_k = \{n \mid a_n \in I_k\} \text{ è infinito.} \end{array} \right.$$



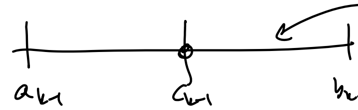
I_{k-1} $\#\{n \mid x_n \in I_{k-1}\} = +\infty$

$\mathcal{N} := \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in [a_{k-1}, c_{k-1}]\}$
$\mathcal{N}' := \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in [c_{k-1}, b_{k-1}]\}$

$\#(\mathcal{N} \cup \mathcal{N}') = +\infty$



"contano" infiniti valori di a_n



se $\#\mathcal{N} = +\infty \Rightarrow \mathcal{N}_k := \mathcal{N}$
e $I_k = [a_{k-1}, c_{k-1}] =: [a_k, b_k]$, $a_{k-1} < b_k$
se $\#\mathcal{N}' = +\infty \Rightarrow \mathcal{N}_k = \mathcal{N}'$
e $I_k = [c_{k-1}, b_{k-1}] =: [a_k, b_k]$

$$a_{k-1} \le a_k < b_k \le b_{k-1}, \quad b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k} = \frac{b-a}{2^k}.$$

$$a_k \nearrow \alpha \le \beta \swarrow b_k \quad \beta - \alpha \le b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \to 0. \Rightarrow \beta = \alpha$$

$n_1 \in \mathcal{N}_1$ $n_2 > n_1$ $n_2 \in \mathcal{N}_2$, . . .

Scegliamo $n_1 < n_2$, $(\quad) = \; = \;,$

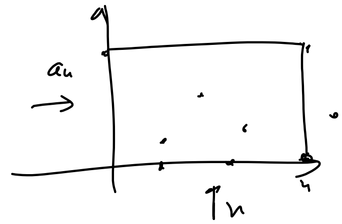
$x_{n_k} \to \alpha$ infatti

$$\begin{array}{ccccc} a_k & \le & x_{n_k} & \le & b_k \\ \downarrow & & \Downarrow & & \downarrow \\ \alpha & & \downarrow & & \alpha \\ & & \alpha & & \end{array}$$

$n_k \nearrow$ ∎

(trovare il min di $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

trovare il min $\{n \mid a_n > 3\}$ ∄)



Teorema Se $E \subseteq \mathbb{R}$ è un insieme limitato e infinito $\Rightarrow$ $\mathcal{D}E = \mathcal{D}E \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$

Dim: analoga per bisezione: $E \subseteq [a_0, b_0]$, $a_0 < b_0$

$E \cap [a_0, c_0]$

$E \cap [c_0, b_0]$

almeno uno di questi due insiemi è infinito

se $\# E \cap [a_0, c_0] = +\infty$, $a_1 = a_0$ $b_1 = c_0$

altrimenti $\# E \cap [c_0, b_0] = +\infty$ $a_1 = c_0$, $b_1 = b_0$

Itero $I_k = [a_k, b_k]$ con $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$

$a_{k-1} \le a_k < b_k \le b_{k-1}$

$a_k \to \alpha$, $b_k \to \alpha$ $\qquad a_0 \le \alpha \le b_0$

$\forall$ intorno V di α $\# V \cap E = +\infty \implies \alpha \in \mathcal{D}E$ ∎

Attenzione nel primo teorema di B-W non ho assunto che

$E := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sia infinito !

ORE 12:15 Complementi

$$(1) \begin{cases} \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \end{cases}$$

Dimostrare che.

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Es $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$1 = \sin\frac{\pi}{2} = \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}$$

$$0 = \cos\frac{\pi}{2} = \cos\left(2\,\frac{\pi}{4}\right) = \cos^2\frac{\pi}{4} - \sin^2\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \left|\cos\frac{\pi}{4}\right| = \left|\sin\frac{\pi}{4}\right|$$

ma tra $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\cos x, \sin x > 0$.

$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \alpha > 0$$

$$1 = 2\alpha^2 \iff \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$

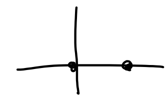
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

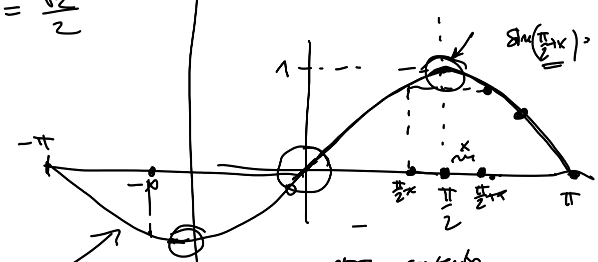
$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x}$

$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$



N.B. Tutte le formule di p. 155 derivano da (1), segue che basta conoscere la forma $\sin x$ su $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \iff \left\{x=\frac{\pi}{2}\right\}$ è un asse di simmetria per il grafico



$\sin(-x) = -\sin x$

strett. crescente

$\sin x \sim x$ per $x \to 0$.

e per periodicità $\sin(x+2\pi) = \sin x$

ES trovare formule ricorsive per i valori di $\alpha_k = \sin\frac{\pi}{2^k}$, $\beta_k = \cos\frac{\pi}{2^k}$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$

Es Calcolare $\sin\frac{\pi}{3}$ e $\cos\frac{\pi}{3}$ Sugg calcolare $\cos 3x$ e $\sin 3x$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x\cos x - \sin 2x\sin x = (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x - 2\sin^2 x\cos x$$

$$\sin(3x) = \sin(2x+x) = \sin 2x\cos x + \cos 2x\sin x = 2\sin x\cos^2 x + (\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x$$

$$= 2\sin x(1-\sin^2 x) + (1-2\sin^2 x)\sin x$$

$$= 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$0 = \sin\pi = \sin\left(3\,\frac{\pi}{3}\right) = 3\sin\frac{\pi}{3} - 4\sin^3\frac{\pi}{3}$$

$$= \sin\frac{\pi}{3}\left(3 - 4\sin^2\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\iff 4\sin^2\frac{\pi}{3} = 3 \qquad \sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{3}{4} \qquad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dimostrare che $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Es. trovare formule ricorsive $\cos(nx)$ e $\sin(nx)$ in termini di $\cos x$ e $\sin x$ (De Moivre)

Teorema $\mathbb{R}$ non è numerabile

Ricorda che $\#A = +\infty$

$\iff$ A contiene un insieme numerabile

$\iff A \supseteq J$ con $J = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Oss. Basta dimostrare che $[0,1]$ non è numerabile $\left(\begin{array}{l}\text{se lo fosse, lo sarebbe anche } [0,1) \\ \text{e lo sarebbe anche } \mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n,n+1)\end{array}\right)$

$\xrightarrow{\text{an iniettiva}}$

$\#\mathbb{Q} = \#\mathbb{N}$ ossia $\mathbb{Q}$ è numerabile

Supponiamo, per assurdo, che $[0,1]$ sia numerabile

cioè $\underline{[0,1] = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}}$ x_n iniettiva (ossia $x_n \neq x_m$ se $n \neq m$)

$I_0 := .$

Dividiamo $[0,1]$ in tre intervalli di lunghezza $\frac{1}{3}$

$[0,1] = [0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3},\frac{2}{3}] \cup [\frac{2}{3},1]$, due casi

$x_1 \geq \frac{1}{2} \to I_1 := [0,\frac{1}{3}] = [a_1,b_1]$

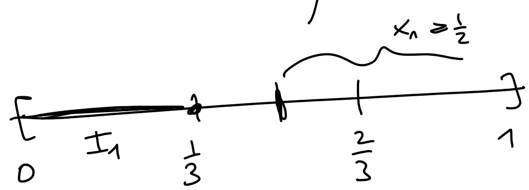
$x_1 < \frac{1}{2} \to I_1 := [\frac{2}{3},1] = [a_1,b_1]$

$I_0 = [a_0, b_0]$ $a_0 = 0$, $b_0 = 1$

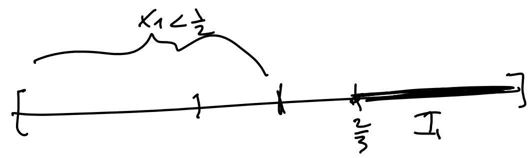
$I_1 = [a_1, b_1]$

In entrambi:

$0 = a_0 \leq a_1 < a_1 + \frac{1}{3} = b_1 \leq b_0 = 1$, $d(x_1, I_1) \geq \frac{1}{6}$



$x_1 - \frac{1}{3} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$



$\frac{2}{3} - x_1 > \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4-1}{6} = \frac{1}{6}$

Iteriamo la costruzione

$$I_j := [a_j, b_j] = \begin{cases} [a_{j-1}, a_{j-1} + \frac{1}{3^j}] & \text{se } x_j \geq \frac{a_{j-1}+b_{j-1}}{2} \\ [b_{j-1} - \frac{1}{3^j}, b_{j-1}] & \text{se } x_j < \frac{a_{j-1}+b_{j-1}}{2} \end{cases}$$

$0 = a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_j < \underset{\overset{\shortparallel}{a_j + \frac{1}{3^j}}}{b_j} \leq b_{j-1} \leq \ldots \leq b = 1$, $\boxed{d(x_j, I_j) \geq \frac{1}{2 \cdot 3^{j+1}}} > 0.$

$\left(\begin{array}{l} d(x,A) = \inf_{y\in A} |x-y| \\ x \in A \quad d(x,A) = 0. \end{array}\right)$

$a_j \nearrow \alpha \in [0,1]$ ma $\underline{\alpha \neq x_n \ \forall n}$ infatti

$\underline{I_j \subseteq I_n}$ $\forall j \geq n.$

$a_n \leq a_j \leq b_n \Rightarrow \underline{a_n \leq \alpha \leq b_n}$

$\underline{d(x_n, I_n)} \geq \frac{1}{2 \cdot 3^{n+1}} \Rightarrow x_n \notin I_n$ ⊠

$$\mathbb{V}$$
$$\alpha + I_n$$

ORA 13:10