venerdì 18 dicembre 2020 08:13

Consideriamo, data una successione arbitraria $\{a_n\}$,

$\boxed{\mathcal{L}_{\{a_n\}}}$ = l'insieme di tutti i limiti (incluso $\pm\infty$) possibili ottenuti tramite successioni estratte regolari (convergenti o divergenti a $\pm\infty$)

$= \{ L \in \mathbb{R}^* \mid \exists$ sottosucc $\{a_{n_k}\}$ di $\{a_n\}$ t.c. $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = L \}$

Esempi $a_n = (-1)^n$, $\mathcal{L} = \{+1, -1\}$

Oss Se $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = E$ è finito $(\# E < +\infty) \iff$

a_n assume un numero finito di valori.

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5$

$\Rightarrow \mathcal{L} \subseteq E$ infatti $\forall\ y \neq x_i\ \exists\ V$ intorno di y t.c. $V \cap E = \emptyset$

$\Rightarrow y$ non può essere il lim a_{n_k}, $\forall\ a_{n_k}$.

Può capitare che $\mathcal{L} \subsetneq E = \mathrm{im}(a_n)$

esempio
$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 3 \\ a_n = 5, \quad \forall\ n \geq 4 \end{cases}$$

$E = \{-1, 0, 3, 5\}$

$\mathcal{L} = \{5\}$ $\forall\ a_{n_k}$ definitiv $\forall\ k \geq 4$ $a_{n_k} = 5$.

Sappiamo che $\mathbb{Q}$ è numerabile ossia $\mathbb{Q} = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ con a_n iniettiva ($a_n \neq a_m$ se $n \neq m$).

$y \in \mathbb{R}$

$I_1 = (y-1, y+1)$ $\quad \exists\ r \overset{\mathbb{Q}}{\in} (y-1, y) \Rightarrow \exists\ n_1 \in \mathbb{N} \mid a_{n_1} = r$

$\boxed{\delta_1 = 1}$

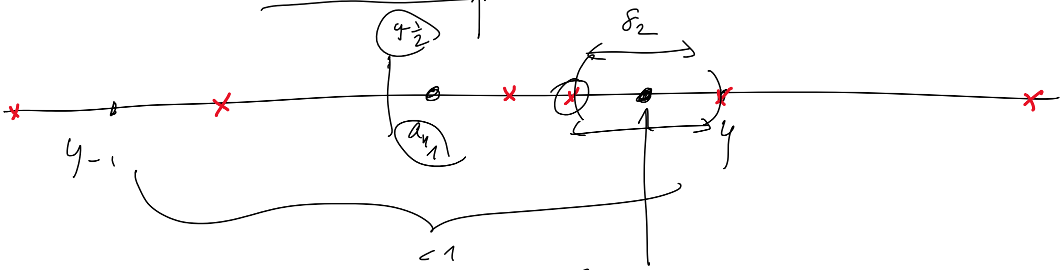
$y-1 \quad a_{n_1} \quad y$

Affermo che $\exists\ n_2 > n_1 \mid y - \frac{1}{2} < a_{n_2} < y$

$\ldots\ a_n \neq y\}$

$E_1 := \{ a_n \mid n = n_1 \ldots$

$\delta_2 = \min\{ y - \frac{1}{2} , y - x \mid x \in E_1 \}$, $\delta_k = \min\{ y - \frac{1}{k} , y - x \mid x \in E_k \}$.



$\exists\, r \in (y, y-\delta_2)$, $\delta_2 \le \frac{1}{2}$

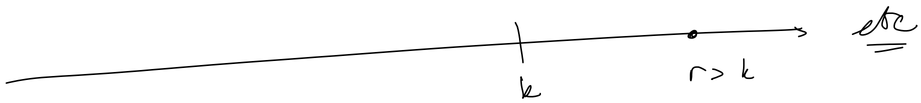
$\exists\, n \mid a_n = r \Rightarrow n > n_1$.

Itero. $n_k \nearrow +\infty \mid y - \delta_k < a_{n_k} < y$

$\boxed{|a_{n_k} - y| = y - a_{n_k} < \delta_k \le \frac{1}{k}}$ $\Rightarrow a_{n_k} \to y$

$\frac{1}{k} \to 0$

$\mathcal{L}_{\{a_n\}} \supseteq \mathbb{R}$, $\boxed{\mathcal{L}_{\{a_n\}} = \mathbb{R}^*}$



Qual è $\mathcal{L}_{\{a_n\}}$:

(i) $\mathbb{Q}$

(ii) $\emptyset$

(iii) $\mathbb{R}$

(iv) $\mathbb{Q}^c$

(v) nessuna delle precedenti ($\mathbb{R}^*$)

Oss (i) Se a_n è regolare $\Rightarrow \mathcal{L}_{\{a_n\}} = \{L\}$ dove $L = \lim a_n \in \mathbb{R}^*$

(ii) Può essere $\mathcal{L}_{\{a_n\}} = \emptyset$? NO per il teorema di Bolzano-Weierstrass

$\boxed{\text{Teo B-W} \quad \mathcal{L}_{\{a_n\}} \ne \emptyset.}$ Questa è una riformulazione equivalente del Teorema di Bolzano-Weierstrass.

... è regolare ... $a_n \to L$

(iii) Se $\mathcal{L}_{\{a_n\}} = \{L\}$, $L \in \mathbb{R}^* \implies \{a_n\}$ è regolare

per il teorema ponte $\quad n \to a_n$ ha limite $L \in \mathbb{R}^* \iff \forall \{n_k\} \mid n_k \in \mathbb{N} = \mathrm{dom}(a_n)$ con $n_k \to +\infty \implies a_{n_k} \to L$

e naturalmente possiamo estrarre da n_k una sottosucc. $m_k \mid m_k \uparrow +\infty$ strettamente crescente

a_{m_k}

Data a_n $\quad \emptyset \neq \mathcal{L}_{\{a_n\}} \subseteq \mathbb{R}^*$

Se $\mathcal{L}_{\{a_n\}}$ non è limitato sup [inf] $\implies \sup \mathcal{L}_{\{a_n\}} = +\infty$ $\quad [\inf \mathcal{L}_{\{a_n\}} = -\infty]$

Sia $\alpha := \sup \mathcal{L}_{\{a_n\}}$ e $\omega = \inf \mathcal{L}_{\{a_n\}}$, $\; -\infty \leq \omega \leq \alpha \leq +\infty$

Se α è $\max \mathcal{L}_{\{a_n\}} \iff \exists\, n_k \uparrow$ t.c. $a_{n_k} \to \alpha$

Teorema $\mathcal{L}_{\{a_n\}}$ ha max e min in $\mathbb{R}^*$.
(Lemma 6.7)

Def $\quad$ massimo [minimo] limite di $\{a_n\}$ è il $\max \mathcal{L}_{\{a_n\}}$ $\quad [\min \mathcal{L}_{\{a_n\}}]$

e si denotano con $\limsup_{n\to+\infty} a_n$ $\quad [\liminf_{n\to-\infty} a_n]$ ←

$\overline{\lim}\, a_n$ $\quad [\underline{\lim}\, a_n]$ ← $\quad$ notazioni comuni.

$\max\lim a_n$ $\quad [\min\lim a_n]$ ←

Dim $\quad$ Dimostriamo che $\mathcal{L}_{\{a_n\}}$ ha massimo $\quad \mathcal{L}_{\{a_n\}} \neq \emptyset$ per B-W

poniamo $\alpha := \sup \mathcal{L}_{\{a_n\}} \in \mathbb{R}^*$. Dobbiamo far vedere che $\exists\, a_{n_k} \to \alpha$. $\quad$ caratt. sup con intorni

$\forall\, V$ intorno di α $\exists\, n \mid a_n \in V$ $\quad \left(\exists\, L \neq \alpha \in V \cap \mathcal{L}_{\{a_n\}} \implies \exists\, n_k \mid a_{n_k} \to L \right.$

$\left. \implies \exists\, k_0 \mid a_{n_{k_0}} \in V \right)$

definizione di limite $\quad a_{n_k} \to L$

Siano

$$V_k = \begin{cases} \left(\alpha - \frac{1}{k}, \alpha + \frac{1}{k}\right), & \text{se } \alpha \in \mathbb{R} \\ (k, +\infty), & \text{se } \alpha = +\infty \\ (-\infty, -k), & \text{se } \alpha = -\infty \end{cases}$$

(V_k sono intorni di α)

$\forall k \;\exists\, m_k \nearrow +\infty \mid \quad a_{m_k} \in V_k \quad$ e $\quad a_{m_k} \to \alpha$

$$\alpha - \frac{1}{k} < a_{n_k} < \alpha + \frac{1}{k}$$

$$\alpha - \frac{1}{k} \to \alpha, \quad a_{n_k} \to \alpha, \quad \alpha + \frac{1}{k} \to \alpha$$

Nel secondo caso. $k < a_{n_k} \longrightarrow +\infty$, $\quad k \to +\infty$

Per un lemma sappiamo che $\exists$ $\underline{\underline{n_k}}$ sottosucc. di $\underline{\underline{n_k}}$ strett. crescente

e quindi $a_{n_k} \to L \implies \underline{\underline{L \in \mathcal{L}_{\{a_n\}}}}$

Passiamo al minimo.

$$\omega := \underline{\inf \mathcal{L}_{\{a_n\}}} = -\sup(-\mathcal{L}_{\{a_n\}}) \overset{\text{Ass.}}{=} -\sup\left(\mathcal{L}_{\{-a_n\}}\right) \overset{\text{per la prima parte dim}}{=} -\max\left(\mathcal{L}_{\{-a_n\}}\right)$$

$$= \underline{\min \mathcal{L}_{\{a_n\}}}$$

+ Ass.

$$-E := \{-x \mid x \in E\}.$$

Esercizi

$$\boxed{-\sup(-E) = \inf E}$$

$$\boxed{-\inf(-E) = \sup E}$$

N.B. Abbiamo dimostrato che $\boxed{\liminf a_n = -\limsup(-a_n)}$

Oss. Se $\underline{\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n} \iff \mathcal{L}_{\{a_n\}} = \{L\}$. $\quad \underline{L = \overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n}$

$\implies \{a_n\}$ è regolare e $\lim a_n = \overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n$...

$$\sum_{k=2}^{\infty} \underbrace{(-1)^{\left[\frac{k}{3}\right]} \frac{1}{\log k}}_{a_k} = \frac{1}{\lg 2} - \frac{1}{\lg 3} - \frac{1}{\lg 4} - \frac{1}{\lg 5} + \frac{1}{\lg 6} + \frac{1}{\lg 7} + \frac{1}{\lg 8} - $$

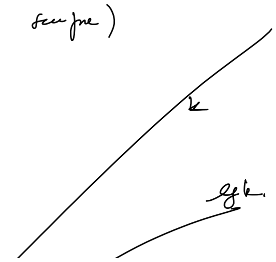
	$\left[\frac{k}{3}\right]$
1	0
2	0
3	1
4	1
5	1
6	2

$$\begin{cases} |a_k| = (\lg k)^{-1} \to 0 \\ a_k \to 0 \end{cases}$$

Cr Nec ✓.

$(a_k \to 0 \iff |a_k| \to 0$ sempre$)$

$$\underline{\sum \frac{1}{\lg k} = \sum |a_k| = +\infty}$$



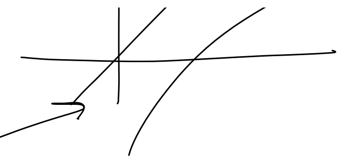
definitivamente

7	2
8	2
9	3
10	3
11	3
12	4
	4
	4

$\frac{1}{\lg k} > \frac{1}{k}$

$\iff$

$k > \lg k$.



il crit conv assol. fallisce.

(usando strumenti)

Un'altra speranza è Abel - Dirichlet.

$\sum b_n a_n$ con $a_n \searrow 0$ e $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ è limitata $\implies$

allora $\sum b_n a_n$ è convergente.

(per procedimento $\sum_1^\infty b_n a_n = \sum_1^\infty B_n (a_n - a_{n+1})$)

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(-1)^{[\frac{k}{3}]}}_{b_k}$$ è limitata.

$b_k =$ 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3

k=1, k=2

$B_1 = 1 \qquad B_2 = 2$

$B_3 = 1, \quad B_4 = 0, \quad B_5 = -1$

$B_6 = 0, \quad B_7 = 1, \quad B_8 = 2$

$B_9 = 1, \quad B_{10} = 0, \quad B_{11} = -1$

$$\boxed{-1 \le B_n \le 2}$$

Es. $\sum (-1)^{[\frac{2}{3}k]} \frac{1}{\lg k}$, diverge a $+\infty$

$a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ TROVARE $\overline{\lim}\, a_n$ e $\underline{\lim}\, a_n$ $\boxed{\overline{\lim}\, a_n = 1, \ \underline{\lim} = -1}$

$\parallel$

$\mathcal{L}_{\{\sin(n\frac{\pi}{4})\}}$

$\sin n\frac{\pi}{4}$: 0, ± 1, $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

assume alternativamente e infinite volte

Sol Alternativa. $-1 \le \sin n\frac{\pi}{4} \le 1$

determinante.

Oss $\boxed{\alpha \le a_n \le \beta}$ $\alpha \le \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow \forall L \in \mathcal{L}_{(a_n)}$, $\alpha \le L \le \beta$.

se trovo $a_{n_k} \to \beta \Rightarrow \beta = \overline{\lim}\, a_n$

se trovo $a_{m_k} \to \alpha \Rightarrow \alpha = \underline{\lim}\, a_n$

Oss. a_n e b_n che differiscono al più per un numero finito di termini

$\Rightarrow \mathcal{L}_{\{a_n\}} = \mathcal{L}_{\{b_n\}}$

$\sin n\frac{\pi}{4} = 1 \iff n\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{n = 4k}$ $\boxed{n_k = 2 + 8k.}$

$\sin n_k \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow \overline{\lim}\, \sin n\frac{\pi}{4} = 1.$

$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$

$\max\lim a_n = 1 = \overline{\lim}\, a_n$

$\min\lim a_n = -1 = \underline{\lim}\, a_n.$

$\boxed{-1 + \frac{1}{n} \le a_n \le 1 + \frac{1}{n}}$

$a_{n_k} \le 1 + \frac{1}{n}$

$\boxed{L \le 1}$