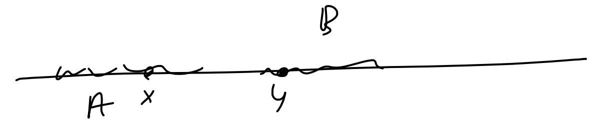
NB questo è un ordine parziale tra sottinsiemi di $\mathbb{R}$.

ASSIOMA DI COMPLETEZZA, XII ASSIOMA DI DEDEKIND

(D) A, B sono due insiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ t.c. $\underline{A \leq B}$ $\left(\overset{def}{\Longleftrightarrow} x \leq y, \forall x \in A, \forall y \in B \right)$



Allora $\exists$ un numero $\underline{s \in \mathbb{R}}$, t.c.

(1) $x \leq s \leq y, \ \forall x \in A, \forall y \in B$.

$x \leq y$

Non è detto che tale s sia unico. Ad es., $A = \{x < 0\}$ $B = \{x \geq 1\}$

allora ogni $0 \leq s \leq 1$ è un elemento che soddisfa (1)

Def. $A \neq \emptyset$, $\underline{M \in A}$ si dice massimo per A se $M \geq x, \forall x \in A$.

... $m \in A$ MINIMO " $m \leq x \ \forall x \in A$.

Un numero $M \in \mathbb{R}$ si dice MAGGIORANTE di $A \neq \emptyset$ se $M \geq x \ \forall x \in A$ — M può non appartenere ad A

" $m \in \mathbb{R}$ MINORANTE di — $m \leq x \ \forall x \in A$ —

$\bar{s} \in \mathbb{R}$ è l'ESTREMO SUPERIORE di $A \neq \emptyset$ se $\bar{s}$ è il più piccolo maggiorante di A

(!!) (ossia se $\mathcal{M}(A) := \{M \in \mathbb{R} \mid M \text{ è maggiorante di } A\}$, $\bar{s} = \min \mathcal{M}(A)$)

$\underline{s} \in \mathbb{R}$ è l'ESTREMO INFERIORE di $A \neq \emptyset$ se $\underline{s}$ è il più grande dei minoranti di A

(ossia se $m(A) := \{m \in \mathbb{R} \mid m \text{ è minorante di } A\} \Rightarrow \underline{s} = \max m(A)$)

. A si dice limitato superiormente (inferiormente) se ammette un maggiorante (minorante) di A.

TEOREMA D Se $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ è limitato superiormente. Allora $\exists !$ l'estremo superiore di A.

" " " " inferiormente " " " inferiore di A.

$\longrightarrow$ ok

Dim. Se $A \neq \emptyset$ e limitato superiormente $\iff \mathcal{M}(A) := \{M \in \mathbb{R} \mid M \geq x \ \forall x \in A\} \neq \emptyset$

Gli insiemi A e $\mathcal{M}(A)$ sono t.c. $\quad x \leq y \quad \forall x \in A, \forall y \in B$

Oss. $\underline{A} \leq \underline{\mathcal{M}(A)} \overset{(D)}{\Longrightarrow} \exists \ \bar{s} \in \mathbb{R} \mid \quad x \leq \bar{s} \leq y, \quad \forall x \in A, \forall y \in \mathcal{M}(A)$

cioè $\bar{s} \in \mathcal{M}(A)$ $\qquad$ $\bar{s} = \min \mathcal{M}(A)$.

(Oss. il massimo o il minimo di un insieme, quando $\exists$, sono unici.
Se M e M' sono due massimi di $A \iff M, M' \in A$ e poi $M \geq x, M' \geq x \quad \forall x \in A$
$M \geq M'$, $M' \geq M \Longrightarrow M' = M$.)

Es. $A \neq \emptyset$ limitato inferiormente $\Rightarrow$ $\boxed{\inf A = -\sup(-A)}$

$A \neq \emptyset$ " superiormente $\Rightarrow$ $\sup A = -\inf(-A)$.

$\iff \exists \ m \in \mathbb{R} \mid \quad m \leq x \quad \forall x \in A$

cioè $-m \geq -x, \ \forall x \in A \iff M$ è un maggiorante per $-A := \{y \mid y = -x, x \in A\}$

M

$\Longrightarrow -A$ è limitato sup., $-A \neq \emptyset \Longrightarrow \exists \ \bar{s} = \sup(-A)$

cioè $\quad \bar{s} \geq -x, \ \forall x \in A$ e $\quad \bar{s} \leq M \quad \forall M \mid M \geq y, \forall y \in A$

$-\bar{s} \leq x \quad \forall x \in A \qquad\qquad -\bar{s} \geq -M \quad \forall M \mid -M \leq -y \quad \forall y \in A$

$= -$ ... minorante di A $\qquad\qquad$ minorante

$-\bar{s}$ è ...

ossia $\underline{s} := -\bar{s}$ è il più grande dei minoranti di A

ossia $\underline{s}$ è l'estremo inferiore di A $= \inf A$

$\underline{s} = -\bar{s}$ dove $\bar{s} = \sup(-A)$.

<u>Es.</u> Se $A \leq B$ (insiemi non vuoti)

$\inf A \leq \underline{\sup A \leq \inf B} \leq \sup B$

$A \leq B \Leftrightarrow \forall x \in A, \forall y \in B, \quad x \leq y \Rightarrow \sup A \leq y$ essendo $y \in \mathcal{M}b(A)$

$\sup A$ ↑ $\underline{\min \mathcal{M}b(A)}$

(vale $\forall y \in B$) $\Rightarrow \sup A$ è minorante di B $\quad \sup A \leq \inf B$ ↑ max{minoranti di A}.

Proposizione 1.93 (caratterizzazione di sup/inf) $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

(i) $\bar{s} = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{s} \text{ è un maggiorante di } A \\ \forall t \in A, t < \bar{s} \Rightarrow \exists x \in A \mid x > t \end{cases}$

(ii) $\underline{s} = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{s} \text{ è un minorante di } A \\ \forall t \in A, t > \underline{s} \Rightarrow \exists x \in A \mid x < t \end{cases}$

<u>Dim</u> (i) Assumiamo che $\bar{s} = \sup A \Rightarrow \bar{s}$ è un maggiorante di A. Sia $\underline{t < \bar{s}}$

se, p.a., $\forall x \in A$, $x \leq t \Leftrightarrow t$ è un maggiorante di $A \Rightarrow \bar{s} \leq t$ contraddizione

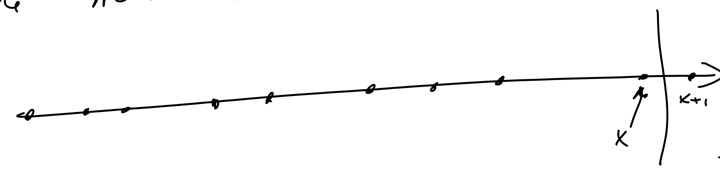
...

(ii) per esercizio

Proposizione 1.95 $A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{Z}$. Se A è limitato superiormente $\Rightarrow$ A ha massimo

" " inf— $\Rightarrow$ A ha minimo $\leftarrow$ ES

Dim Assumiamo A limitato superiormente. Allora $\overset{\text{Teorema}}{\Longrightarrow}$ $M = \sup A \in \mathbb{R}$



$\mu \in \mathbb{R}$ $\mu \geq x, \forall x \in A$

Supponiamo, p.a., che $M \notin A$, $t = M-1 < M$

$\overset{\text{Prop 1.93}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ $x \in A$, $\underline{M-1} < x < M$ $(\uparrow t)$

Sempre per Prop. 1.93 $\exists$ $y \in A$ | $x < y < M$

$n = y - x \in \mathbb{N}$ (per definizione di $\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$ e $n > 0 \Rightarrow n \geq 1 \Rightarrow n \in \mathbb{N}$

se trovo $0 < n < 1$ $\Rightarrow$ $1 < n+1 < 2$ non è vero (Prop 1.27))

$0 < \underset{n}{\underset{\parallel}{y-x}} < M-x < 1$ ma questo non è possibile contradd ⊠

Proposizione 1.97 (Proprietà archimedea) Siano $x, y \in \mathbb{R}$ positivi $(x, y > 0)$. Allora $\exists\, n \in \mathbb{N} \mid nx > y$.

Dim l'enunciato è equivalente a dire che $\boxed{\forall\ z > 0\ \exists\ n \in \mathbb{N} \mid n > z}$ $\left(z = \frac{y}{x}\right)$

$\Longleftrightarrow$ $\mathbb{N}$ non è limitato superiormente

Se $z < 1$ allora $1 > z$, $(1 \in \mathbb{N})$ Sia $z \geq 1$.

$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq z\}$ $1 \in A$ $\Rightarrow$ $A \neq \emptyset$

$A := \{ m \in \mathbb{N} \mid m \le z \}$

z è un maggiorante di A $\underset{\text{Prop. 1.25}}{\Longrightarrow}$ esiste $M = \max A$

$\Longrightarrow$ $\underset{\mathbb{N}}{M+1} > z$ (se così non fosse, se $\underset{A}{M+1} \le z$ $\quad M+1 \in A$

$\Longrightarrow$ M non è il max A (se $M+1 \in A$, $M+1 > M$)) $\boxtimes$

Def. Sia $x \in \mathbb{R}$, $[x] :=$ parte intera di x $= \max \underbrace{\{ n \in \mathbb{Z} \mid n \le x \}}_{\neq \emptyset}$

Es. Dimostrare che [dato $x \in \mathbb{R}$] $A = \{ n \in \mathbb{Z} \mid n \le x \} \Longrightarrow A \neq \emptyset$

Se $x \ge 0 \Longrightarrow 0 \in A \neq \emptyset$

Se $x < 0 \Longrightarrow -x > 0 \underset{}{\overset{\text{Archimede}}{\Longrightarrow}} \exists\, n \in \mathbb{N} \mid n > -x \Longrightarrow \underset{\mathbb{Z}}{-n} < x$.

$$\underset{\mathbb{Z}}{[x]} \le x < [x]+1$$

perché $[x]$ è il $\max \{ n \in \mathbb{Z} \mid n \le x \}$

In altri termini $n = [x]$ è l'unico numero in $\mathbb{Z}$ | $n \le x < n+1$ $\quad (2)$

Def. Parte frazionaria di x, $\{x\} = x - [x]$

Oss. Da (2) $\quad 0 \le x - [x] = \{x\} < 1$

$$x = [x] + \{x\} = n + t \qquad \text{con } n \in \mathbb{Z} \quad 0 \le t < 1$$

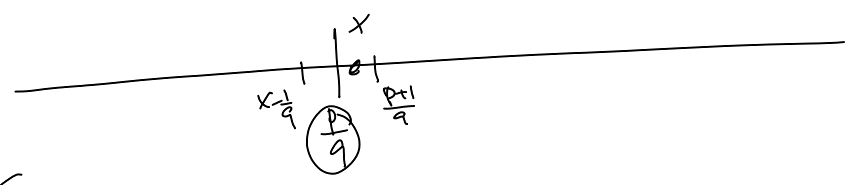
mantissa unica

Proposizione 1.100 ("Densità dei razionali")

(i) $x \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{N}$. Allora $\exists!\ p \in \mathbb{Z}$ t.c. $0 \le x - \frac{p}{q} < \frac{1}{q}$. Infatti $p = [xq]$.

(ii) ("densità") $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$ $\exists\ r \in \mathbb{Q}$ $|$ $x < r < y$.

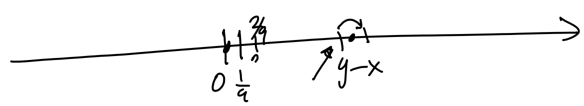
Oss. $x < \frac{x+y}{2} < y \Rightarrow$ tra due reali c'è sempre un reale
" " razionali " " " razionale



(i) $\Rightarrow$ (ii)

$y - x > 0$ $\quad q \in \mathbb{N}$ $|$ $\frac{1}{q} < y - x$ (per Archimede)

$q > \frac{1}{y-x}$



$\frac{j}{q}$ $\quad j \ge 0$

Dato $x \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{N}$

Sia $p := [xq]$

$$\boxed{p \le xq < p+1} \quad \text{per definizione di parte intera.}$$

$$\frac{p}{q} \le x < \frac{p}{q} + \frac{1}{q} \iff 0 \le x - \frac{p}{q} < \frac{1}{q} \quad \blacksquare$$

In altre parole, $\frac{p}{q}$ è la miglior approssimazione razionale di x con denominatore $\le q$.

<u>Dim (ii)</u> $\quad N > (y-x)^{-1}, \quad N \in \mathbb{N} \qquad \left(x<y, \quad y-x>0, \quad (y-x)^{-1} > 0 \right)$

$k = [xN], \qquad r = \frac{k+1}{N} \in \mathbb{Q}$

$$\boxed{k \le xN < k+1} \qquad \frac{k}{N} \le x < \frac{k+1}{N} = r = \frac{k}{N} + \frac{1}{N} \le x + \frac{1}{N} < y. \quad \blacksquare$$

$N > (y-x)^{-1}$.

$\frac{1}{N} < y-x$