venerdì 20 novembre 2020 08:22

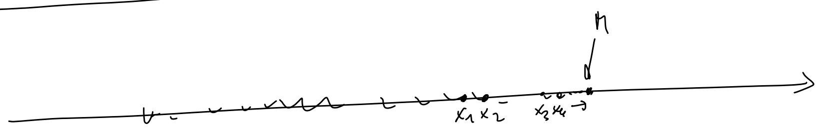
Proposizione (caratterizzazione tramite successioni di sup/inf)

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$. $M \in \mathbb{R}^*$ è l'estremo superiore [o inferiore] di E

$\iff$ M è un maggiorante [minorante] di E ed $\exists \{x_n\} \subseteq E$ (Def. $x_n \in E, \forall n \in \mathbb{N}$)

non decrescente [crescente] t.c. $x_n \to M$.

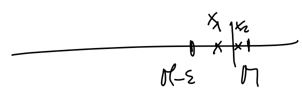
Inoltre se $M \in \mathcal{D}^* E \implies$ la successione $\{x_n\}$ si può prendere strettamente monotona.



se $M \geq x \ \forall x \in E$

e $\exists x_n \in E \mid x_n \to M$

$\implies M = \sup E$



Dim "$\implies$" Sia $M = \sup E$ e costruiamo iterativamente una succ monotona $x_n \in E \mid x_n \nearrow M$

Caso 1 $\quad M = +\infty \overset{\text{def}}{\iff} E$ non è limitato superiormente

Sia $x_1 \in E \implies \exists\ x_2 > \max\{x_1, 2\}$

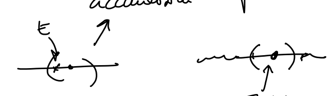
Dato $x_n \in E$, scelgo un $\overset{\in E}{x_{n+1}} > \max\{x_n, n\}$

$\{x_n\}$ è strett. crescente $x_{n+1} > x_n$ e $x_n > n \overset{\text{Teorema del confronto}}{\implies} x_n \nearrow +\infty = \sup E$.

Caso 2 $\quad M \in \mathbb{R} \cap \mathcal{D}E$ $\qquad$ Sia $x_1 < M$ un pto qualunque di E

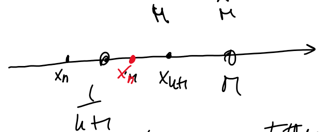
(Ricorda che $\mathcal{D}E \cap \mathcal{I}E = \emptyset$)

pti di accumulazione $\qquad$ punti interni



$\forall U \qquad \exists U$ t.c.

Dato x_n sia $x_{n+1} \in E \mid \max\{\underset{\hat{M}}{x_n}, \underset{\hat{M}}{M - \frac{1}{n+1}}\} < x_{n+1} < M$



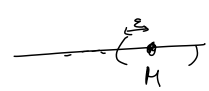
La succ $\{x_n\}$ è per costruzione strettamente crescente ($x_{n+1} > x_n$)

e $M - \frac{1}{n} < x_n < M \implies x_n \nearrow M$.

$M - \frac{1}{n} \to M$

Caso 3 $\quad M \notin \mathcal{D}E \implies M$ è un pto isolato di E

ossia è il $\max E$. $\quad x_n \equiv M$



"$\impliedby$" Caso in cui $M \in \mathbb{R}$

M è un maggiorante di E ed $\exists \{x_n\} \subseteq E \mid x_n \to E$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \mid x_n > M - \varepsilon \quad \forall n \geq N \implies \overset{\in E}{x_N} > M - \varepsilon$

$\implies$ (per la caratterizzazione del sup).

... è limitato superiormente ∎

Caso $M = +\infty$, $x_n \to +\infty \iff \forall M \; \exists \; x_n > M \iff$ ...

<u>Proposizione</u> (caratterizzazione per successioni di $\mathcal{D}^*E$) Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$.

$$\mathcal{D}^*E = \{ y \in \mathbb{R}^* \mid \exists \; \{x_n\} \subseteq E \setminus \{y\} \text{ con } \lim x_n = y \} =: S^*$$
$$\mathcal{D}E = \{ y \in \mathbb{R} \mid \quad " \quad " \quad " \quad \} =: S$$

<u>Dim.</u> $S^* \overset{?}{\subseteq} \mathcal{D}^*E$: Sia $y \in S^*$ ed $\exists \; x_n \in E \setminus \{y\} \mid x_n \to y$

$\forall \; U$ int. di $y \; \exists \; N \mid x_n \in U \setminus \{y\} \;\; \forall \; n \geq N$ $\quad x_N \in E$, $x_N \neq y$, $x_N \in U$ ✓

Dimostriamo che $\mathcal{D}^*E \subseteq S^*$ $\quad$ Sia $y \in \mathcal{D}^*E$. Definisco

$$U_n := \begin{cases} (y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}) & y \in \mathbb{R} \\ (n, +\infty) & y = +\infty \\ (-\infty, -n) & y = -\infty \end{cases}$$

$\forall n, \; \exists \; x_n \neq y$, $x_n \in U_n$ ($\in E$). Dal T. d. confr. segue che $x_n \to y$

$$x_n \in (y - \tfrac{1}{n}, y + \tfrac{1}{n}) \iff |x - y| < \tfrac{1}{n}$$

$n < x_n \implies x_n \to +\infty \qquad x_n < -n \implies x_n \to -\infty$. ☒

<u>Teorema "ponte"</u> Sia $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \in \mathcal{D}^*E$, $L \in \mathbb{R}^*$.

$$\lim_{x \to y} f(x) = L \iff \underbrace{\forall \; \{x_n\} \text{ successione in } E \text{ con } \lim x_n = y \text{ si ha che } f(x_n) \to L}$$

<u>Dim</u> "$\implies$" Assumiamo che $\lim_{x \to y} f(x) = L$. Sia $\{x_n\} \subseteq E \mid \lim x_n = y$

Sia V un intorno di $L \implies \exists \; U$ di $y \mid f(x) \in V$, $\forall \; x \in U \cap E \setminus \{y\}$

Poiché $x_n \to y \; \exists \; N \mid x_n \in U \setminus \{y\} \;\; \forall \; n \geq N \implies f(x_n) \in V$ ossia $f(x_n) \to L$.

"$\impliedby$" dimostrazione per contrapposizione.

" f non ha limite L per $x \to y$ "

$L = \lim_{x \to y} f(x) \iff \forall$ intorno V di $L \; \exists$ un intorno U di $y \mid f(x) \in V$, $\forall x \in U \cap E \setminus \{y\}$

f non ha limite L per $x \to y$ $\iff \exists$ un intorno V di $L \mid \forall$ intorno U di y, $\exists \; x \in U \cap E \setminus \{y\} : f(x) \notin V$

$\forall n \; \exists \; x_n \in U_n \cap E \setminus \{y\} \mid f(x_n) \notin V$

$x_n \in U_n \implies x_n \to y$. Quindi abbiamo trovato una successione $\{x_n\} \subseteq E \setminus \{y\}$, $x_n \to y$ ma $f(x_n) \not\to L$ ☒

dim per contrapposizione

... $Q \implies$ NON P

$P \Rightarrow Q \iff$ NON Q ⟹ ...

P, NON Q $\Rightarrow$ contraddizione . (dim per assurdo)

Corollario (criterio di $\nexists$ di limite) Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{D}E$.

Se $\exists$ due successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ in $E \setminus \{x_0\}$ con $\lim x_n = x_0$ e $\lim y_n = y_0$ |

$\lim f(x_n) = L \neq \lim f(y_n) \implies f$ non ha limite L per $x \to x_0$.

Conseguenza immediata del teorema ponte

$f \longleftrightarrow a_n$

$x_n \longleftrightarrow n_k$

$y_n \longleftrightarrow m_k$

$x_0 \longleftrightarrow +\infty$

Es $\lim_{n\to\infty} \underbrace{1+(-1)^n}_{a_n}$ per n pari $a_n = 2$, n dispari $a_n = 0$

Sto applicando il Corollario alla funzione $a : n \in \mathbb{N} \mapsto a_n$

$n_k = 2k \qquad m_k = (2k+1) \qquad n_k, m_k \to \overset{x_0}{\overset{\shortparallel}{+\infty}}$

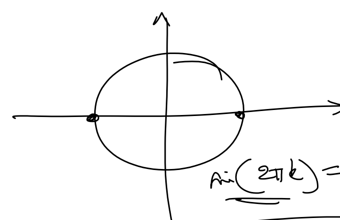
$f(x_n) \leftrightarrow a_{n_k} = 1 + (-1)^{2k} = 2$

$f(y_n) \leftrightarrow a_{m_k} = 1 + (-1)^{2k+1} = 0$

Studiare la successione $a_n = \sin\left(n \frac{\pi}{8}\right)$. a_n ha limite ? NO

Trovare due successioni a valori in $\mathbb{N}$, $\{n_k\}$ e $\{m_k\}$ | $n_k \to +\infty$ e $m_k \to +\infty$

$a_{n_k} = \alpha \neq \beta = a_{m_k}$

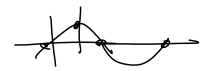


$\sin(2\pi k) = 0.$

$n_k \cdot \frac{\pi}{8} = 2\pi k \qquad \boxed{n_k = 16k}$

$a_{16k} = \sin\left(16k \frac{\pi}{8}\right) = \sin 2\pi k = 0.$

$\sin \pi =$



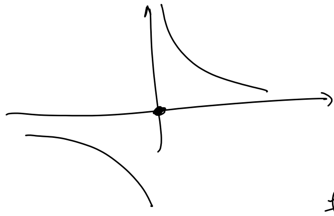
$m_k \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\boxed{m_k = 4 + 16k} \nearrow +\infty$

$a_{m_k} = a_{4+16k} = \sin\left((4+16k)\frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ \nexists \qquad f(x) = \frac{1}{x}, \quad f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$

Trovare due successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $x_n \to 0$, e $y_n \to 0$ | $\lim f(x_n) \neq \lim f(y_n)$



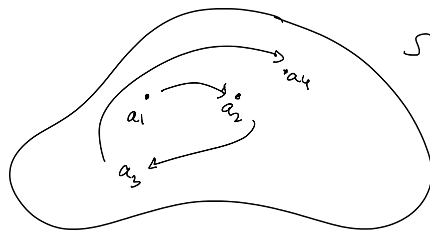
$x_n = -\frac{1}{n}$ $\quad y_n = \frac{1}{n}$

$x_n \neq 0 \neq y_n$ $\quad x_n \to 0$, $y_n \to 0$

$f(x_n) = -n \to -\infty$ $\quad f(y_n) = n \to +\infty$. ✓

Successioni definite per ricorrenza $\quad$ ossia successioni che verificano

$a_n = f_n(a_{n-1})$.



Ω Sistemi Dinamici

fine '800

Poincaré, Birkhoff,

Siegel, Kolmogorov.

-- --

Esempio (Algoritmo babilonese o di Erone)

Sia $p > 1$.

$$a_n := \begin{cases} p & n = 1 \\ \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{p}{a_{n-1}}\right) & n \geq 2 \end{cases}$$

Oss $a_n > 0$, $\forall n$

Dire se $\exists \lim a_n$ e calcolarlo

Se il $\lim a_n$ $\exists$ e $\neq 0$ $\quad \lim a_n = \lim a_{n-1}$

$$a_n = \boxed{\frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{p}{a_{n-1}}\right)}$$

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{p}{L}\right) \quad 2L = L + \frac{p}{L} \iff \quad L = \frac{p}{L} \iff L^2 = p \iff L = \sqrt{p}$$

Risposte possibili

(i) 0 $\leftarrow$ no perché $\quad a_{n-1} + \frac{p}{a_{n-1}} \to +\infty$ (o non ~~ha~~ limite) $\quad a_n > 0$

(ii) $\sqrt{p}$ ✓

(iii) $-\sqrt{p}$ no $a_n > 0$

(iv) $+\infty$ $\leftarrow$ no $\Rightarrow$ $\quad a_{n-1} + \frac{p}{a_{n-1}} \to +\infty$

(v) $\nexists$

Verifichiamo che a_n ha limite

Suggerimento. a_n è strettamente decrescente

$$a_n = \begin{cases} p \\ \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{p}{a_{n-1}}\right) \end{cases}$$

$a_1 = p > 1$. $\quad a_2 = \frac{1}{2}(p+1) < \frac{1}{2}(p+p) = p$ $\quad 0 < a_2 < a_1$

$$\boxed{a_{n+1} < a_n} \iff \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{p}{a_n}\right) < a_n \iff \frac{p}{a_n} < a_n \iff \boxed{p < a_n^2}$$

Dimostriamolo per induzione su $n \geq 1$

$$a_{n+1}^2 = \frac{1}{4}\left(a_n^2 + 2p + \frac{p^2}{a_n^2}\right) = \frac{1}{4a_n^2}\left(a_n^4 + 2pa_n^2 + p^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4a_n^2}\left(a_n^2 + p\right)^2 \overset{?}{>} p$$

$$\left(a_n^4 + 2a_n^2 p + p^2\right) = \left(a_n^2 + p\right)^2 > 4pa_n^2 \iff \left(a_n^2 - p\right)^2 > 0. \checkmark$$

$a_n \searrow$, $a_n > 0$ $\exists \lim a_n = L \in [0, p)$

$$\Rightarrow \boxed{L = \sqrt{p}}$$