mercoledì 21 ottobre 2020 08:15

DEFINIZIONE DI RADICI ENNESIME

Sia $x \in \mathbb{R}$ $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$

Sia $\boxed{R_n := \{ t \in \mathbb{R}, t \geq 0 \mid t^n \leq x \}}$

Oss $0 \in R_n \neq \emptyset$, $\underbrace{x+1}_{M}$ è un MAGGIORANTE di R_n

$M \doteq \max\{x,1\} \Longrightarrow M^n \geq M \geq \underline{x \geq t^n} \Longrightarrow \boxed{M^n \geq t^n \Longrightarrow \underline{M \geq t}}$ $\quad \underline{M, t \geq 0}$

Quindi se $t \in R_n$ (ossia $t \geq 0$ e $t^n \leq x$)

$\Longrightarrow M \geq t$ cioè M è un MAGGIORANTE di R_n

Ricorda

$\underline{x, y \geq 0}$ $\quad x^n > y^n \iff x > y$, $\underline{\forall\, n \in \mathbb{N}}$

deriva da $x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$ $\quad (*)$

Se $a > b \geq 0$ e $n \geq 2$, allora

$\underline{a^n - b^n < (a-b)\, n\, a^{n-1}}$ $\quad (**)$

Per (D) $\exists !$ $y := \sup R_n \geq 0$ tale numero si chiama RADICE ENNESIMA di x e si denota $\sqrt[n]{x} =: x^{\frac{1}{n}}$

N.B $\sqrt[n]{x} \geq 0$, $(x \geq 0)$

$$\left((x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k \underline{y}^{n-1-k} < \underbrace{(x-y)}_{>0}\sum_{k=0}^{n-1} x^k \underline{x}^{n-1-k} = \right.$$

(se $n \geq 2$ e $x > y \geq 0$)

$$\left. = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1} = (x-y)x^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} 1 = (x-y)\cdot x^{n-1}\cdot n \right)$$

TEOREMA 1.103 (*) Dati $x \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt[n]{x}$ è l'unico numero non negativo y t.c. $y^n = x$

DIM. $n=1$ è ovvio. Consideriamo $n \geq 2$. Anche il caso $x=0$ è ovvio.

Consideriamo quindi $x>0$ e $n \geq 2$.

Unicità: Supponiamo P.A che esistano due numeri y e $\bar{y} \geq 0$ ($y \neq \bar{y}$) $\mid$ $y^n = \bar{y}^n = x$

allora o $y > \bar{y}$ oppure $\bar{y} > y$. Assumiamo, ad esempio, che $\bar{y} > y$

$$0 = \underset{x}{\bar{y}^n} - \underset{x}{y^n} = \underbrace{(\bar{y}-y)}_{>0} \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \bar{y}^k y^{n-1-k}}_{>0 \;\; n\geq 2} = (\bar{y}-y)\left(\underset{k=0}{y^{n-1}} + \underbrace{y^{n-2}\bar{y}}_{>0,\ k=1} + \dots \right) > 0$$

contradd.

Idea della dimostrazione: $\boxed{y := \sqrt[n]{x} = \sup R_n}$ $(n \geq 2,\ x > 0)$

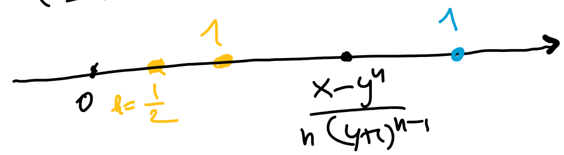
$\rightarrow$ $y^n < x$ non è vera ✓ $\qquad$ $y^n > x$ non è vera. Quindi $y^n = x$.

($a < b$ è falso $\Leftrightarrow$ $a \geq b$)

Supponiamo, P.A., che $y^n < x$. Scelgo un numero $0 < h \leq 1$ t.c.

(N.B $y > 0$, $y^n = x$ $y \neq 0$)

(1) $h \underset{\uparrow}{<} \underbrace{\frac{x-y^n}{n(y+1)^{n-1}}}$ $\quad (\Rightarrow x-y^n>0)$



(ad esempio $h=\frac{1}{2}\min\left\{1, \frac{x-y^n}{n(y+1)^{n-1}}\right\}$)

$$\underbrace{(y+h)^n - y^n}_{a > b} \overset{(**)}{<} h\, n\,(y+h)^{n-1} \underset{h<1}{\le} h\, n\,(y+1)^{n-1} \overset{(1)}{<} \underbrace{x-y^n}$$

Quindi $(y+h)^n < x$ ma $y = \sup R_n = \sup\{t\ge 0 \mid t^n \le x\}$

perché $t=(y+h)>0$, $t^n < x \iff t\in R_n$ e $y<t \Rightarrow y$ non è un maggiorante di R_n.

Supponiamo P.A. che $y^n > x$. Definiamo $k := \frac{y^n - x}{n y^{n-1}} > 0$

$$0 < k < \frac{y^n}{n y^{n-1}} = \frac{y}{n} \underset{n\ge 2}{<} y$$

Se $t > y-k > 0 \iff t^n > (y-k)^n \iff$

$$y^n - t^n < y^n - (y-k)^n \overset{(**)}{<} k\, n\, y^{n-1} = y^n - x$$

$\iff x < t^n \iff t \notin R_n$ $\quad$ ($\boxed{t>y-k} \Rightarrow t\notin R_n$ cioè $t\in R_n \Rightarrow \boxed{t\le y-k}$)

Se $t\in R_n \Rightarrow t \le y-k$

ossia $\Updownarrow$ $\underline{y-k}$ è un maggiorante di R_n, $(k>0)$

ma allora $y \neq \sup R_n := \min\{\text{maggioranti di } R_n\}$. $\blacksquare$

Simbolo di Paul Halmos

OSS $\underline{x \in \{t \geq 0\} \mapsto x^{\frac{1}{n}} \in \{t \geq 0\}}$, $(x^{\frac{1}{n}})^n = x$

$\overline{\mathbb{R}_+} = \underline{[0,+\infty)}$

$f \circ g = id$, $id: x \mapsto x$

$\underline{g = f^{-1}}$, $f(y) = y^n$, $g(x) = x^{\frac{1}{n}}$

$x \in \overline{\mathbb{R}_+} \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ è la funzione INVERSA di $\underline{\underline{y \in \overline{\mathbb{R}_+}}} \mapsto y^n$

$$0 \leq x < y \iff \begin{cases} x^{\frac{1}{n}} < y^{\frac{1}{n}} \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

ossia la funzione $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ è strettamente crescente

Corollario 1.106 (i) $(\underline{\underline{xy}})^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{n}} \cdot y^{\frac{1}{n}} \longleftarrow$

(ii) $(x^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{1}{nm}} \longleftarrow$

Dim. (i) $\Big(\underbrace{x^{\frac{1}{n}} \cdot y^{\frac{1}{n}}}\Big)^n = \Big(x^{\frac{1}{n}}\Big)^n \Big(y^{\frac{1}{n}}\Big)^n = x \cdot y = \Big((x \cdot y)^{\frac{1}{n}}\Big)^n$

$\underline{(ab)^n = a^n b^n}$ $\underline{\underline{n \in \mathbb{Z}}}$ TEO 1.103

$\implies x^{\frac{1}{n}} \cdot y^{\frac{1}{n}} = (x \cdot y)^{\frac{1}{n}}$

$$(n)\quad \left(\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}\right)^{nm} \overset{\uparrow}{=} \left(\left(\underbrace{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)}_{a}^{\frac{1}{m}}\right)^{m}\right)^{n} \underset{\text{TEO 1.03}}{=} \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n} = x = \left(x^{\frac{1}{nm}}\right)^{nm}$$

$$a^{nm} = \left(a^{n}\right)^{m} = \left(a^{m}\right)^{n}$$

TEO. 1.103

$$\boxed{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n} = x}$$

$$\Rightarrow \quad \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{1}{nm}}. \quad \boxtimes$$