lunedì 21 dicembre 2020 08:22

Data una successione arbitraria $\{a_n\}$

$\overline{\lim}\, a_n = \max\lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to+\infty} a_n = \underline{\underline{\max}}\, \mathcal{L}_{\{a_n\}}$ $\qquad \mathcal{L}_{\{a_n\}} = \{ \underline{\underline{L}} \in \mathbb{R}^* \mid \exists\, \overset{\text{sottosucc.}}{a_{n_k}} \to L \} \subseteq \mathbb{R}^*$, $\neq \emptyset$

$\underline{\lim}\, a_n = \min\lim_{n\to+\infty} a_n = \liminf a_n = \underline{\underline{\min}}\, \mathcal{L}_{\{a_n\}}$.

Oss. In particolare $\exists\ a_{n_k}, a_{m_k} \mid a_{n_k} \to \max\lim a_n \quad a_{m_k} \to \min\lim a_n$

Se $a_{j_k} \to L \in \mathbb{R}^*$ è una qualunque sottosucc. regolare $\Rightarrow \underline{\lim}\, a_n \le L \le \overline{\lim}\, a_n$

$(L \in \mathcal{L}_{\{a_n\}})$.

a_n ha limite $L \Leftrightarrow \overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n = L$

$\Updownarrow$ Teorema ponte

$\mathcal{L}_{\{a_n\}} = \{L\}$

Caratterizzazione del max/min lim

Def. 1 Un elemento di $\overset{M \in}{\mathbb{R}^*}$ si dice maggiorante DEFINITIVO di $\{a_n\}$ se $\exists N \mid$ $a_n \le M,\ \forall\, n \ge N$. Sia $\overline{\mathcal{M}}_{\{a_n\}} := \{$magg. definitivi di $\{a_n\}\} \subseteq \mathbb{R}^*$

Analog. def per MINORANTE DEFINITIVO $m \in \mathbb{R}^*$

$a_n \ge m$ $\qquad \underline{\mathcal{M}}_{\{a_n\}} := \{$minoranti definitivi di $\{a_n\}\} \subseteq \mathbb{R}^*$

Chiaramente $\underline{\mathcal{M}},\ \overline{\mathcal{M}} \neq \emptyset$

$-\infty \in \underline{\mathcal{M}} \qquad +\infty \in \overline{\mathcal{M}}$

Chiamiamo $\overline{m} := \inf \overline{\mathcal{M}}_{\{a_n\}}$ $\qquad \underline{m} := \sup \underline{\mathcal{M}}_{\{a_n\}}$

(non min) $\qquad$ (non max)

Def. 2 Data una successione $\{a_n\}$

$\overline{a}_n := \sup\{ a_k \mid k \ge n \} \in \mathbb{R}^*$

$\underline{a}_n := \inf\{ a_k \mid k \ge n \} \in \mathbb{R}^*$

$\underline{a}_n := \inf \{a_k \mid k \geq n\} \in \mathbb{R}$

Oss. $\quad \overline{a}_{n+1} \leq \overline{a}_n \qquad \{a_k \mid k \geq n+1\} \subseteq \{a_k \mid k \geq n\}$

$\{a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \dots\} \qquad \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$

$\underline{a}_{n+1} \geq \underline{a}_n$

Quindi $\exists \lim_{n \to +\infty} \overline{a}_n = \inf \overline{a}_n = \overline{\ell}$,

$\lim_{n \to +\infty} \underline{a}_n = \sup \underline{a}_n := \underline{\ell}$

Prop. 6.14 Data $\{a_n\}$. $\quad \max\lim a_n = \inf \overline{\mathcal{M}} = \overline{\ell} \quad (1)$

$\min\lim a_n = \sup \underline{\mathcal{M}} = \underline{\ell} \quad (2)$

Dim* Dimostriamo che α ha ? → VEDI FINE SLIDE

$\overline{\lim}\, a_n \leq \overline{m} \leq \overline{\ell} \leq \overline{\lim}\, a_n \Rightarrow (1)$

nel caso di $\{a_n\}$ limitata. Gli altri casi sono lasciati per esercizio

Sia $L = \overline{\lim}\, a_n = \max \mathcal{L} \Rightarrow \exists\, a_{n_k} \to L$, $\forall M \in \overline{\mathcal{M}}, \exists N \mid$

$a_n \leq M \; \forall n \geq N$, $\exists k_0 \mid n_{k_0} \geq N \Rightarrow a_{n_k} \leq M$, $\forall k \geq k_0$

$\Rightarrow L = \lim_{k \to +\infty} a_{n_k} \leq M \Rightarrow \overline{\lim}\, a_n \leq M$, $\forall M \in \overline{\mathcal{M}}$

$\Rightarrow \overline{\lim}\, a_n$ è un minorante di $\overline{\mathcal{M}} \Rightarrow L \leq \inf \overline{\mathcal{M}} =: \overline{m}$

$\forall n, \; \overline{a}_n = \sup \{a_k \mid k \geq n\} \in \overline{\mathcal{M}} \Rightarrow \overline{m} \leq \overline{a}_n \Rightarrow \overline{m} \leq \overline{\ell}$

$\overline{m} = \inf \overline{\mathcal{M}}, \quad \overline{a}_n \to \overline{\ell}$

Idea: costruisco una sottosucc $\{a_{n_k}\}$ di $\{a_n\}$ t.c. $\lim a_{n_k} \geq \overline{\ell}$

VEDI SOTTO

SUCCESSIONI DI CAUCHY (1872)

Def Una successione $\{a_n\}$ si dice di CAUCHY o FONDAMENTALE se

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \mid |a_n - a_m| < \varepsilon \;\; \forall n, m \geq N$

Teorema (Cauchy). Una succ. $\{a_n\}$ è di Cauchy $\iff$ è convergente ovvero $\exists\, L \in \mathbb{R} \mid a_n \to L$

Lemma Se $\{a_n\}$ è di Cauchy, allora è limitata

Dim $\exists\, N \mid \quad |a_n - a_m| < 1 \quad \forall\, n,m \geq N$

Se $n \geq N \qquad |a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N| = M_1$

Se $M := \max\{|a_1|, \dots, |a_{N-1}|, 1+|a_N|\} \geq |a_n| \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. $\blacksquare$

Dim Teorema di Cauchy "$\Leftarrow$". $\overbrace{\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, N}^{a_n \to L} \quad |a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall\, n \geq N$

Se $n,m \geq N \qquad |a_n - a_m| \leq |a_n - L| + |L - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$ ✓

"$\Rightarrow$" Sia $\{a_n\}$ di Cauchy. Per il lemma $\{a_n\}$ è limitata.

Per B-W. $\exists\, L \in \mathbb{R}$ e $a_{n_k} \to L$. Sia $\varepsilon > 0$ e $N \mid$

$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, n,m \geq N \quad \Rightarrow \exists\, k_0 \mid \ n_{k_0} \geq N$ e $|a_{n_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall\, k \geq k_0$

Se $n \geq N \quad |a_n - L| \leq |a_n - a_{n_{k_0}}| + |a_{n_{k_0}} - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$ $\square$

"Costruzione di Cauchy dei numeri reali a partire da $\mathbb{Q}$."

Dato $\mathbb{Q}$ come costruire $\mathbb{R}$? Le risposte sono state date nel 1872 da Cauchy, Dedekind e Weierstrass.

Cauchy ha introdotto una relazione d'equivalenza tra le successioni:

$\{a_n\} \sim \{b_n\}$ se $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, N \mid \quad |a_n - b_m| < \varepsilon, \ \forall\, n,m \geq N \quad (*)$

ES 66 Dimostra che se vale $(*)$ $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono di Cauchy.

Sia $N \mid \quad |a_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, n,m \geq N$

se $n,m \geq N$, $\quad |a_n - a_m| \leq |a_n - b_N| + |b_N - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. $\square$

Dimostrare che $(*)$ è una RELAZIONE D'EQUIVALENZA su $\mathcal{C} = \{\{a_n\}$ di Cauchy$\}$, $a_n \in \mathbb{Q}$

RELAZIONE D'EQUIVALENZA |
$\forall\, \alpha \in A, \quad \alpha \sim \alpha$ (RIFLESSIVITÀ)
$\forall\, \alpha, \beta, \gamma \in A, \quad \alpha \sim \beta, \ \beta \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$ (TRANSITIVITÀ)
! $\longrightarrow$ $\forall\, \alpha, \beta \in A, \quad \alpha \sim \beta \Rightarrow \beta \sim \alpha$ (SIMMETRIA)

Ovviamente $\{a_n\} \sim \{a_n\}$ essendo di Cauchy

la simmetria è ovvia essendo $|a_n - b_m| = |b_m - a_n|$

Transitività $\{a_n\} \sim \{b_n\} \sim \{c_n\}$

$$|a_n - c_m| \le \underline{\underline{|a_n - b_m|}} + \underline{\underline{|b_m - c_m|}} < \varepsilon \quad \text{ovvio per } n, m \ge N.$$

$$\mathbb{R} := \{ \underbrace{[\{a_n\}]}_{} \mid \{a_n\} \in \mathcal{C} \}$$

classi di equivalenza generate da $\{a_n\}$.

(Def.
$$[\alpha] = \{\beta \in A \mid \beta \sim \alpha\}$$)

Il lungo percorso è dimostrare che $\mathbb{R}$ verifica i 16 assiomi di $\mathbb{R}$.

$$\sqrt{2} = [1{,}4142\ldots]$$

Es. su max/min limite da GIUSTI ES.

103 $a_n = n - [\sqrt{n}] \to +\infty \iff \max\lim a_n = \min\lim a_n = +\infty.$

$$n - [\sqrt{n}] \ge n - (\sqrt{n} + 1) = n - 1 - \sqrt{n} = \underset{\downarrow \atop +\infty}{n} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}_{\downarrow \atop 1} \to +\infty.$$

101. $a_n = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{\downarrow \atop 0} + \underbrace{\frac{1+(-1)^n}{2}}_{\varepsilon_n}$ $\qquad \varepsilon_{2k} = 1, \quad \varepsilon_{2k+1} = 0.$

$\overline{\lim}\ a_n = 1, \quad \underline{\lim}\ a_n = 0.$

$$a_{2k} = \frac{1}{2k} + 1 \to 1$$

$$a_{2k+1} = \frac{-1}{2k+1} \to 0$$

Sia a_{n_k} una qualunque sottosuccessione regolare di a_n. $\quad a_{n_k} \to L \in \mathbb{R}$

$$\underset{\swarrow \atop 0}{-\frac{1}{n_k}} \le \overset{L}{\nearrow}a_{n_k} \le \underbrace{\frac{1}{n_k} + 1}_{\downarrow \atop 1} \qquad \underline{\underline{0 \le L \le 1}}$$

$$\boxed{-1 \le (-1)^{n_k} \le 1}$$

Es. 100 $a_n = n^{(-1)^n}$, $n^{(-1)^n}$, $a_{2k} = (2k) \to +\infty$

$$a_{2k+1} = (2k+1)^{-1} = \frac{1}{2k+1} \to 0$$

$\overline{\lim}\, a_n = +\infty$. $\quad \underline{\lim}\, a_n = 0$.

a_{n_k} è regolare $\quad a_{n_k} \to L$

$$0 \leftarrow \underbrace{\frac{1}{n_k}}_{=} \le \underbrace{n_k^{(-1)^{n_k}}}_{\downarrow\, L} \le \underbrace{n_k}_{=} \to +\infty$$

Dimostriamo che: $\exists$ una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ di $\{a_n\}$ t.c. $a_{n_k} \to \overline{\ell} := \inf\{\overline{a}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(Questo conclude la dimostrazione della Proposizione 6.14.)

DIM. Essendo $\overline{\ell}$ l'estremo inferiore di $\{\overline{a}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists\, m = m_k \ge k$ |

$$(**) \qquad \overline{\ell} \le \overline{a}_{m_k} < \overline{\ell} + \frac{1}{k}$$

Ora, poiché $\overline{a}_{m_k} = \sup\{a_n \mid n \ge m_k\}$, $\exists\ j_k \in \mathbb{N}$, $j_k \ge m_k$, t.c.

$$\overline{a}_{m_k} - \frac{1}{k} < a_{j_k} \le \overline{a}_{m_k} \qquad \forall k$$

Quindi da $(**)$ segue che

$$\overline{\ell} - \frac{1}{k} < a_{j_k} < \overline{\ell} + \frac{1}{k}$$

da cui (teorema del confronto) segue che $a_{j_k} \to \overline{\ell}$

Infine ($\{j_k\}$ potrebbe non essere strettamente crescente), per il lemma 6.3 $\exists\ \{n_k\}$ sottosucc. di j_k t.c. n_k è strettamente crescente e $n_k \to +\infty$.

Quindi $a_{n_k} \to \overline{\ell}$. ∎