venerdì 23 ottobre 2020 08:19

TEOREMA $\boxed{\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy} \quad \forall\ x, y \geq 0,\ n \in \mathbb{N}}$

$$\sqrt{6} = \sqrt{2\,3} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$$

$$x^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{x}, \qquad x^{\frac{1}{n}}\, y^{\frac{1}{n}} = (xy)^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} \overset{?}{=} \sqrt{6}$$

$$\sup\{t \geq 0 \mid t^2 \leq 2\}, \quad \sup\{t \geq 0 \mid t^2 \leq 3\}$$

$$\sqrt{6} = \sup\{t \geq 0 \mid t^2 \leq 6\}$$

XVI ASSIOMA (1)

1

$$(\underbrace{\sqrt{2}}_{a}\cdot\underbrace{\sqrt{3}}_{b})^2 = (\sqrt{2})^2\cdot(\sqrt{3})^2 = 2\cdot 3 = 6$$

2

$$(a\,b)^n = a^n\, b^n\ \forall$$

Teorema $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x, \quad x \geq 0,\ n \in \mathbb{N}.$

PROPRIETÀ POTENZE CON ESPON. NATURALI

$$z = \sqrt{2}\cdot\sqrt{3}, \quad z^2 = 6 = (\sqrt{6})^2 \implies z = \sqrt{6} \text{ ovvero } \boxed{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{6}}\ !!!$$

NATUR...

(3) Sappiamo che se $x, y \geq 0$ e $x^n = y^n \Rightarrow x = y$!

$$x^n - y^n = (x-y) \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}}_{>0}, \quad n \geq 2 \qquad x \neq y$$

$$x^n - y^n > 0 \iff x > y \qquad (x, y \geq 0)$$

VOGLIAMO DEFINIRE x^r, $x \geq 0$ $(x > 0)$ e $r \in \mathbb{Q}$

$r \in \mathbb{Q}$, $r = \frac{p}{q}$ $(:= p \cdot q^{-1})$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ $\qquad p \cdot q^{-1} = q^{-1} \cdot p$

DEF. $\boxed{x^{\frac{p}{q}} := \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p, \quad x \geq 0}$

le proprietà che vogliamo conservare

$\rightarrow x^n \cdot y^n = (xy)^n$ $\qquad n, m \in \mathbb{N}$, $\left[n = \frac{1}{p}, m = \frac{1}{q}\right]$ $p, q \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow (x^n)^m = x^{n \cdot m}$

Nel libro invece la definizione 1.110 è

$$x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}}$$

Proposizione $\forall x > 0$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ $\quad (x^p)^{\frac{1}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$

... delle radici

Dim. Sia $y = x^p$, $z = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$

$$z^q = \left(\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p\right)^q \underset{\uparrow}{=} \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{pq} \underset{\uparrow}{=} \left(\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^q\right)^p \underset{\uparrow}{=} x^p \implies z = \left(x^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

prop. pot. su $\mathbb{Z}$

teorema delle radici

unicità

Abbiamo usato il seguente

Lemma $\boxed{(x^p)^q \underset{\uparrow}{=} x^{pq}}$ se $p, q \in \mathbb{Z}$, $x \neq 0$

Ricorda:

Def. $x \neq 0$ $p \in \mathbb{Z}$, $p < 0$, $x^p := \frac{1}{x^{-p}} = \left(x^{-p}\right)^{-1}$

$2^{-3} := \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

Dim (lemma) se $p, q \geq 0$ lo sappiamo

Dobbiamo considerare vari casi: $p \neq 0 \neq q$

$p > 0 > q$, $-q = n \in \mathbb{N}$

$$\implies (x^p)^{-n} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{(x^p)^n} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{x^{pn}} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{x^{-(pq)}} \underset{\uparrow}{=} x^{pq}$$

def

prop pot. esp in $\mathbb{N}$

def di n

$=: \left(x^{-(pq)}\right)^{-1}$

def. di $x^{-(pq)}$

(N B la proposizione dimostrata all'inizio dell' AA 20/21 da

se $a \neq 0$

$(a^{-1})^{-1} = a$

$(a^n)^m = a^{nm}$

con $n = m = -1$

Gli altri casi si controllano in maniera analoga e sono lasciati per esercizio!

MORALE, $x>0$ $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $\boxed{(x^p)^{\frac{1}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p = x^{\frac{p}{q}}}$ (1)

(1) basta per definire x^r con $x>0$ e $r\in\mathbb{Q}$?

$\longrightarrow$ $\boxed{x^{\frac{3}{9}} = (x^3)^{\frac{1}{9}} \overset{?}{=} x^{\frac{1}{3}}}$

Teorema

$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, $\frac{3}{9} = 3\cdot(3^2)^{-1} = 3\,(3^{-1}\cdot 3^{-1})$

$= (3\,3^{-1})\,3^{-1} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

$b, a \neq 0$ $(ab)^{-1} = a^{-1}\cdot b^{-1}$

$(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, $n=-1$.

Lemma! $x>0$, $p\in\mathbb{Z}$; $q, d\in\mathbb{N}$ $\left(x^{\frac{1}{qd}}\right)^{pd} = x^{\frac{p}{q}}$.

Osservazione

$\left(x^{\frac{1}{qd}}\right)^{pd} \underset{(1)}{=} (x^{pd})^{\frac{1}{qd}}$

Dim. Per l'osservazione

$$\left(x^{\frac{1}{qd}}\right)^{pd} = \underline{(x^{pd})^{\frac{1}{qd}}}$$

$$\Big(\underbrace{(x^{pd})^{\frac{1}{qd}}}_{z}\Big)^q = (x^{pd})^{\frac{q}{qd}} = (x^{pd})^{\frac{1}{d}} = x^{\frac{pd}{d}} = \underline{x^{p}}\ y$$

(Definizione di $y^{\frac{n}{m}}$)

"semplificazione di frazioni"

$\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^3 = x^{\frac{1}{3}}$

$z^q = y$

$\Updownarrow$

$z = y^{\frac{1}{q}}$

$$\Longrightarrow\ \underline{(x^{pd})^{\frac{1}{qd}}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} = x^{\frac{p}{q}}.\ \blacksquare$$

$$x^{\frac{\cancel{p}\cancel{d}}{q\cancel{d}}} = x^{\frac{p}{q}}$$ ← nulla di "profondo"

$$\left(x^{pd}\right)^{\frac{1}{qd}} = x^{\frac{p}{q}}$$ ← è il lemma!

es $$\left(x^{3}\right)^{\frac{1}{9}} \overset{?}{=} x^{\frac{1}{3}}$$

$$8^{\frac{1}{9}} \overset{?}{=} \sqrt[3]{2}$$

$$\left(\sqrt[3]{2}\right)^{3} = 2$$

$$\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{p} = \left(a^{p}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left(8^{\frac{1}{9}}\right)^{3} = 8^{\frac{3}{9}} = 8^{\frac{1}{3}} = \left(2^{3}\right)^{\frac{1}{3}} = 2$$

$$\Rightarrow 8^{\frac{1}{9}} = \sqrt[3]{2}$$

ESERCIZI DA [GE] su sup e inf.

49. $A = \left\{ x = \frac{t+1}{t-2} \;\middle|\; t \in \mathbb{R},\ t > 2 \right\}$

Calcolare sup A e inf A e confronto e dire se sono max o min

$A = \mathrm{im}(f)$ dove $f: t \in \{s > 2\} \mapsto \frac{t+1}{t-2}$

$t = 2 + \varepsilon$

se $t = 2 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$

$$x = \frac{3+\varepsilon}{\varepsilon} = 1 + \frac{3}{\varepsilon}$$

A non è limitato superiormente ossia $\forall M > 1 \ \exists \ x \in A \mid x > M$

(A NON HA MAGGIORANTI $\Longleftrightarrow$)

fisso $M > 0$ $\quad 1 + \frac{3}{\varepsilon} > M \quad \frac{3}{\varepsilon} > M - 1 \quad 0 < \varepsilon < \frac{3}{M-1}$

e prendo $\varepsilon = \frac{3}{2} \frac{1}{M-1}$. $\quad x = t + \varepsilon > M$.

Oss $\boxed{x = \frac{t+1}{t-2} > 1}$ $\quad$ ($t+1 > t-2$, $3 > 0$ ✓) $\quad t-2 > 0$

$x \simeq 1$ per t grande

Indovino: $\boxed{\inf A = 1}$

1 è un minorante

devo far vedere che 1 è il più grande dei minoranti

... $\quad 1 \leq x$, $\forall \ x \in A$

Supponiamo, p.a., che

$1 < y \leq \frac{t+1}{t-2}, \ \forall t > 2$

In realtà abbiamo dimostrato che $\lim_{t \to +\infty} \frac{t+1}{t-2} = 1.$

$\frac{t+1}{t-2} < y$ per un $t > 2$

$t+1 < y(t-2) \qquad 1+2y < t(y-1) \qquad \frac{1+2y}{y-1} < t$

$y-1>0.$

$t = \max\left\{3, 2\frac{1+2y}{y-1}\right\}. \qquad t > 2$

$t \geq 2\frac{1+2y}{y-1} > \frac{1+2y}{y-1}$