lunedì 23 novembre 2020 08:16

FUNZIONI CONTINUE

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\underline{x_0 \in A}$

$A = \mathcal{I}A \cup \mathcal{D}A$ — unione disgiunta $\mathcal{I}A \cap \mathcal{D}A = \emptyset$

- $x_0 \in \mathcal{I}A$ (punto isolato) $\exists \delta > 0 \mid (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap A = \{x_0\}$
- $\underline{x_0 \in \mathcal{D}A}$

DEF. f è continua in $x_0 \in \mathcal{D}A$

$\iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Se $x_0 \in \mathcal{I}A$, f è continua in x_0 (per definizione).

Equivalentemente, possiamo dire che

$$\boxed{f \text{ è cont. in } x_0 \in A \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \mid |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall\ |x - x_0| < \delta,\ x \in A}$$

f è cont. su A se è continua in x_0 $\forall x_0 \in A$.
$C(A) := \{f: A \to \mathbb{R} \mid f \text{ è cont. su } A\}$
Nota: Per l'algebra dei limiti $C(A)$ è uno spazio vettoriale

(1) $x \to x$ ovviamente

Esempio (1') $x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$ è cont. su tutto $\mathbb{R}$
f

$$\big|\underbrace{|x|}_{f(x)} - \underbrace{|x_0|}_{f(x_0)}\big| \le |x - x_0| < \varepsilon = \delta$$

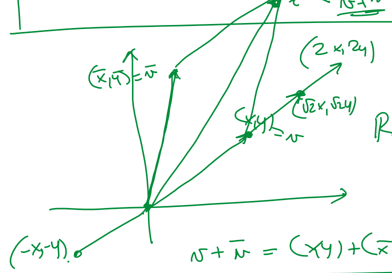
$\mathcal{P}(x)$ polinomio è cont. su $\mathbb{R}$

Per l'algebra dei limiti x^n è cont. su $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \implies$

Anche le funzioni RAZIONALI $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ P, Q polinomi è cont. su $\{x \mid Q(x) \neq 0\}$ (P, Q primi tra loro)

Proposizione* (Continuità delle radici) $x \in [0, +\infty) \mapsto x^r$, $r \in \mathbb{Q}_+$ $(r > 0)$ è cont. su $[0, +\infty)$.

SPAZIO VETTORIALE V su $\mathbb{R}$
è un insieme dove è definita una somma COMMUTATIVA
$\boxed{v, w \in V \mapsto v + w} \in V$
e un'altra operazione (moltiplicazione per SCALARI)
$\boxed{a \in \mathbb{R}, v \in V \mapsto av \in V}$
$\forall a, b \in \mathbb{R}, v \in V$, $(a+b)v = av + bv$



$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ coppie ordinate

$v + \bar{v} = (x,y) + (\bar{x}, \bar{y}) = (x + \bar{x}, y + \bar{y})$
$a(x,y) = (ax, ay)$

Dim. Distinguiamo due casi $x_0 = 0$ e $x_0 > 0$.

Se $x_0 = 0$. Dato $\varepsilon > 0$, voglio trovare $\delta > 0 \mid$

$$|x^r - \underset{\substack{\| \\ 0}}{x_0^r}| = \underline{x^r < \varepsilon} \quad \text{se } 0 \le x < \delta$$

$\Updownarrow$ $(x \ge 0)$

$x < \underline{\varepsilon^{\frac{1}{r}} =: \delta}$ ✓

Sia, ora, $x_0 > 0$.

alg. dei limiti

$\ldots \lim x^r - x_0^r = 0 \iff \lim \left(\frac{x}{x_0}\right)^r - 1 = 0$

x quando ... $x \to x_0$ ... $x \to x_0$

$\Leftrightarrow \boxed{\lim_{y\to 1} y^n = 1}$ $\quad \left(y = \frac{x}{x_0} \right)$

$\Updownarrow$

$\forall \varepsilon\ \exists\, U$ int. di 1 $\mid$ $|y^n - 1| < \varepsilon \quad \forall y \in U \cap [0,+\infty)$

$\Updownarrow$

$0 < \underline{1-\varepsilon} < y^n < 1+\varepsilon$ ✓ $\quad$ (supponiamo $\underline{\varepsilon < 1}$)

$\uparrow$

$U \subseteq (0,+\infty)$

$\Updownarrow \ y>0$

$(1-\varepsilon)^{\frac{1}{n}} < y < (1+\varepsilon)^{\frac{1}{n}}$ ✓

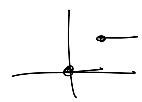
N.B: $(1-\varepsilon)^{\frac{1}{n}} < 1 < (1+\varepsilon)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow U = \underline{\left((1-\varepsilon)^{\frac{1}{n}}, (1+\varepsilon)^{\frac{1}{n}}\right)}$ è un intorno di 1.

per cui $|y^n - 1| < \varepsilon$ se $y \in U$. ■

ES.
$x \in \mathbb{R} \mapsto [x]$ è cont in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (e non è continua su $\mathbb{Z}$).

$[x] = \underline{n}$ dove n è l'unico elemento di $\mathbb{Z}$ t.c. $n \le x < n+1$

$\Rightarrow [x]$ è cost. su $(m, m+1)$ $\xRightarrow{\forall m \in \mathbb{Z}}$ è cont



$\lim_{x \to n+} [x] = n$, $\lim_{x \to n-} [x] = n-1$

$\Rightarrow \lim_{x \to n} [x]\ \nexists \Leftrightarrow$ non è cont. in n

Analog. $\{x\} = x - [x]$ $\Rightarrow \{x\}$ non è cont. in $n \in \mathbb{Z}$

(x: cont.; $[x]$: non è cont. in n)

anche $\operatorname{sgn}^2(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ non è cont. in $x_0 = 0$ ma è cont su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

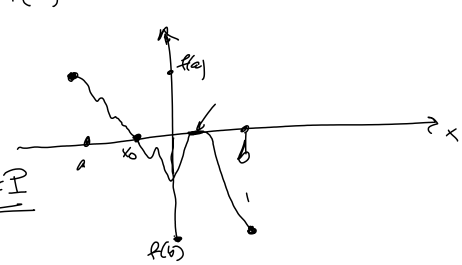
$\lim_{x \to 0\pm} \operatorname{sgn}^2(x) = 1 \neq \operatorname{sgn}^2(0) = 0$

TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI "ZERI" PER FUNZIONI CONTINUE (uno "zero" di f è un pto $x_0 \mid f(x_0) = 0$.)

Sia $f \in C([a,b])$ ($f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ed è cont. su $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$) con $a<b$

e t.c. $f(a) f(b) < 0$ (Così o $f(a) > 0 > f(b)$ oppure $f(a) < 0 < f(b)$).

Allora, $\exists\, x_0 \in (a,b) \mid f(x_0) = 0$ e $\underline{f(x)}\, f(a) > 0 \quad \forall\, a \le x < x_0$.



N.B x_0 è il più piccolo zero di f a destra di a.

(Caso $f(a) > 0 > f(b)$)

Dim. Idea: $P := \{a \le x \le b \mid \underline{f(t) > 0} \ \forall\, \underline{a \le t \le x}\}$, $a \in P$

$x_0 := \sup P \overset{?}{\Longrightarrow} f(x_0) = 0.$

(usa def. di sup e teorema della PERMANENZA DEL SEGNO per funzioni continue)

Ricordiamo $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) > 0 \implies \exists$ un intorno U di $\bar{x}$ | $f(y) > 0 \ \forall \ x \in U \cap dom(f)$
(< 0) " (< 0) "

Se f è cont. in $\bar{x}$ e $f(\bar{x}) > 0 \iff$ "
(< 0)

Osservazione. $a < y \leq b$ | $f(y) < 0 \implies y$ è un maggiorante di P

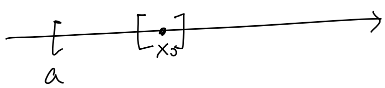
altrimenti $\exists \ x \in P$ | $x > y \implies$ per definizione di P $f(y) > 0$, contraddizione.

Supponiamo, p.a., che $f(x_0) > 0$. per permanenza del segno $\exists \ \delta > 0$ |

$f(x) > 0 \quad \forall \ x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$ $\left(\text{n.b. se } \overbrace{x_0 - \delta < x < x_0 + \delta}^{P(x) \text{ è vera per}} \implies \text{è } P(x) \text{ è vera anche } x_0 - \frac{\delta}{2} \leq x \leq x_0 + \frac{\delta}{2} \right)$

$\in P$

$(a < x_0 - \delta)$ $\cancel{([\,[\ \circ\ ]\,])}$



$\implies x_0 + \delta \in P \implies x_0$ non è un maggiorante di P.

Supponiamo, p.a., $f(x_0) < 0$. Ragionando in maniera analoga troviamo $\delta > 0$. t.c.

$f(x) < 0 \quad \forall \ x_0 - \delta \leq x \leq \min\{x_0 + \delta, b\} \implies f(x_0 - \delta) < 0. \implies x_0 - \delta$ è un magg. di P

ma allora x_0 non è il $\sup P$ contraddizione. Quindi $f(x_0) = 0$.

e $\forall \ x < x_0$, $f(x) > 0$ (altrimenti $x_0 \neq \sup P$).

Caso $f(a) < 0 < f(b)$, sia $F(x) = -f(x)$ F è $\in C([a,b])$

e $F(a) > 0 > F(b) \implies$ la tesi anche in questo caso. ∎

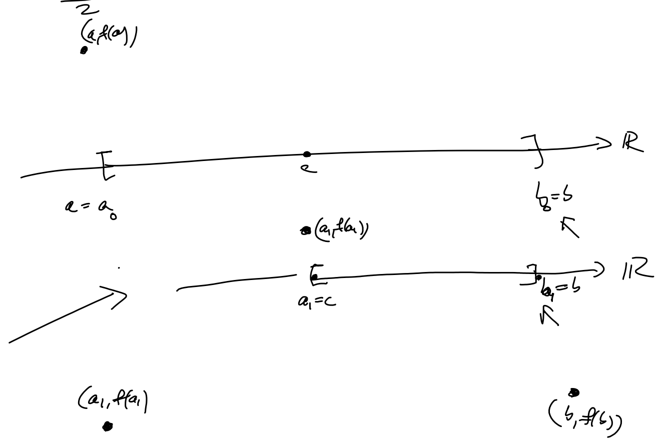
Corollario $f \in C([a,b])$, $f(a) f(b) < 0 \implies \exists \ x_0 \in (a,b)$ | $f(x_0) = 0$.

Dim alternativa ("metodo di bisezione")

Sup $f(a) > 0 > f(b)$. $a_0 := a$, $b_0 = b$ $c = \frac{a_0 + b_0}{2}$

$$f(c) \begin{cases} 0 \xrightarrow{\text{EXIT}} x_0 = c \\ > 0 \to a_1 := c, \ b_1 := b \\ < 0 \to a_1 := a_0, \ b_1 := c \end{cases}$$

$f(c) > 0$

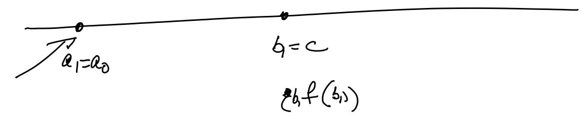


se $f(c) \neq 0$

$f \in C([a_1, b_1])$

$f(a_1) > 0 > f(b_1)$

$f(c) < 0$



Itero ("un ciclo di DO")

Ossia Parto da un intervallo $[a_n, b_n] \subseteq [a, b]$ $\quad f(a_n) > 0 > f(b_n)$

$a_{n-1} \leq a_n < b_n \leq b_{n-1}$, $\forall\ n \geq 1$, $\quad \left(c_n = \frac{a_n + b_n}{2}\right)$

e $\quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}$

Esistono due casi $\exists\, n \mid f(c_n) = 0 \implies c_n = x_0$.

oppure non succede mai e in questo caso

$\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono successioni monotone $\quad \underset{\text{crescente}}{a_n \nearrow} \quad \underset{\text{decrescente}}{\swarrow b_n}$

$a_n \leq b_m \quad \forall\ n, m \quad$ (se $m \geq n$ $\quad a_n < b_n \leq b_m$)

$\underset{\text{teorema sulle funzioni monotone}}{\implies}$ $a_n \nearrow \alpha \leq \beta \swarrow b_n$, ma $\beta - \alpha = \lim (b_n - a_n) = \lim \frac{b-a}{2^n} = 0$

ossia $\alpha = \beta =: x_0$

e $\lim \underbrace{f(a_n)}_{>0} \underset{\text{essendo } f \text{ cont. in } x_0}{=} \lim f(x_0) \geq 0$

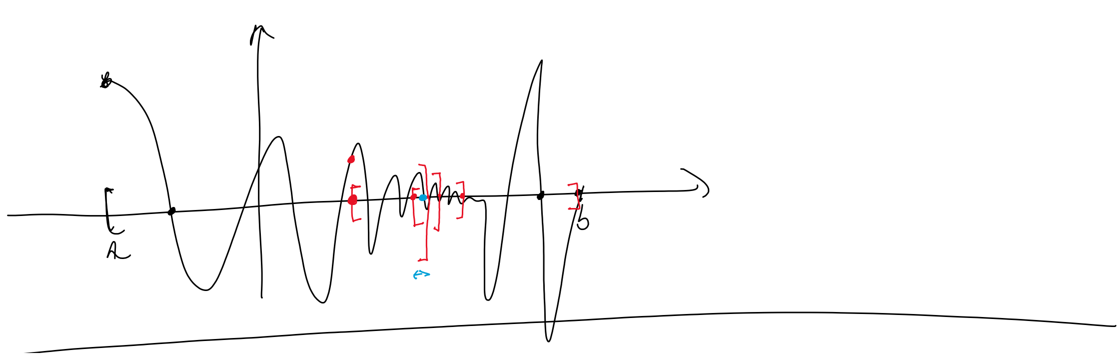
$f(a_n) > 0$

$\boxed{f(x_0) \geq 0}$

(Attenzione non è vero che $x_n > 0$ e $x_n \to \alpha$ $\quad \alpha > 0$

$\alpha \geq 0$, $\quad x_n = \frac{1}{n}$.)

ma $\underset{\leq 0}{f(b_n)} \longrightarrow \underset{\text{per continuità}}{\boxed{f(x_0) \leq 0}} \implies f(x_0) = 0$ ☒



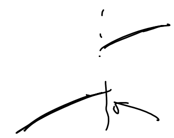
Punti di discontinuità

Def. $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \partial A$. Diremo che

$sgn^2(x)$

(i) f ha una DISCONTINUITÀ ELIMINABILE se $x_0 \in A$ e $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

(ii) f ha una DISCONTINUITÀ DI SALTO in x_0 se $\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$



$[x]$, $\{x\}$ hanno discont. di salto in $n \in \mathbb{Z}$.

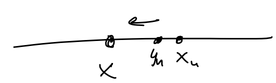
(iii) f ha DISCONTINUITÀ ESSENZIALE se in x_0 uno dei limiti laterali $\nexists$ (finito)

$\frac{1}{x}$ non è cont. 0.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{sui razionali} \\ 0 & \text{sugli irraz.} \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$\forall x_0 \in \mathbb{R} \ \nexists \lim_{x\to x_0^-} f(x), \ \lim_{x\to x_0^+} f(x)$

$x_n = x + \frac{\sqrt{2}}{n} \to x$, $y_n = x + \frac{1}{n} \to x$



se $x \in \mathbb{Q}$ $\quad f(\underset{\notin \mathbb{Q}}{x_n}) = 0$, $\quad f(y_n) = 1$

$x \notin \mathbb{Q}$ $\quad f(x_n) = 1$, $\quad f(y_n) = 0$

Es: $e^{\pi} \in \mathbb{Q}^c$ ✓

$\pi^e \in \mathbb{Q}^c$???

Quindi $\forall x \in \mathbb{R}$ x $\overset{\in disc(f)}{\text{è}}$ una discont. essenziale per f.