mercoledì 25 novembre 2020 08:17

Continuità.

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad A = \mathcal{D}A \,\dot\cup\, \mathcal{I}A$

disgiunte

pti isolati

f è cont in $x_0 \in \mathcal{I}A$ $\left(\Leftrightarrow \exists\, \delta>0 \mid (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap A = \{x_0\}\right)$

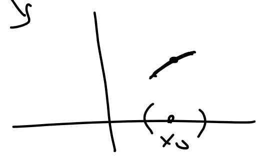
se $x_0 \in \mathcal{D}A$, f è cont in $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists\, \delta>0 \mid |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon,\ \forall\, x\in A,\ |x-x_0|<\delta$

limite

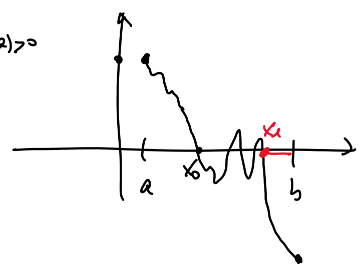
f è cont $\forall\, x_0\in A$, $f \in C(A) :=$
$:= \{$funzioni cont. in ogni punto di $A\}$

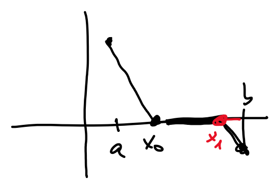
Corollari dei teoremi di limiti (permanenza del segno, combinazioni lineari di funzioni continue sono continue, ..)

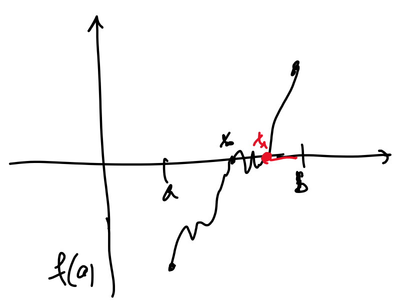


TEOREMA FONDAMENTALE ($\exists$ zeri per funzioni continue)

$f \in C([a,b])$: $f(a)f(b) < 0 \Longrightarrow \exists!\ x_0 \in (a,b) \mid$ (i) $f(x_0)=0$ (ii) $f(x)f(a)>0$ $\forall\, a \le x < x_0$







$f(a)>0$

Idea Dim.: $P := \{x \in [a,b] \mid f(t) > 0 \ \forall\ a \le t \le x\}$

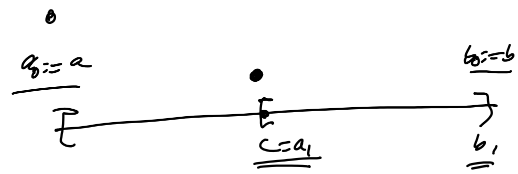
$(f(a)f(t)>0)$

$x_0 = \sup P$.

Questa dim. non è puramente costruttiva (o algoritmica)

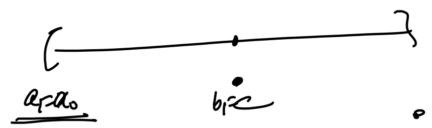
Altra dim. per dimostrare (1) ($\exists$ uno zero)

$f(a)>0$



primo passo. $c = \frac{a+b}{2}$

guardo il segno $f(c)$
- $f(c)=0$ FINITO $c = x_0$
- $f(c)>0 \rightarrow a_1 := c, \; b_1 = b$
- $f(c)<0$



$[a_0,b_0] \rightarrow [a_1,b_1]$

$f(a_1)>0>f(b_1)$

$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$

iterazione o $\exists\, n \mid f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)=0$ $\quad\left(f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right) \neq 0 \right)$

$x_0 = \frac{a_n+b_n}{2}$

oppure $\quad a_n \le a_{n+1} \le b_m \le b_{m+1} \quad \forall\, n,m$

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \sup a_n =: \alpha \le \beta = \inf b_n = \lim b_n .$

$\beta - \alpha \underset{\text{A.d.L.}}{=} \lim (b_n - a_n) = \frac{b-a}{2^n} \longrightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = \alpha$

$f(a_n)>0>f(b_n)$

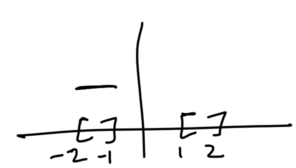
$\underbrace{\lim f(a_n)}_{} \ge 0 \qquad \underbrace{\lim f(b_n)}_{} \le 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = x_0 .$

CONSEGUENZE

Teorema dei valori intermedi

Se I è un intervallo di $\mathbb{R}$, $f \in C(I)$, $\sup f(I)$

e sia $\alpha = \inf f \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, $\beta = \sup f \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$



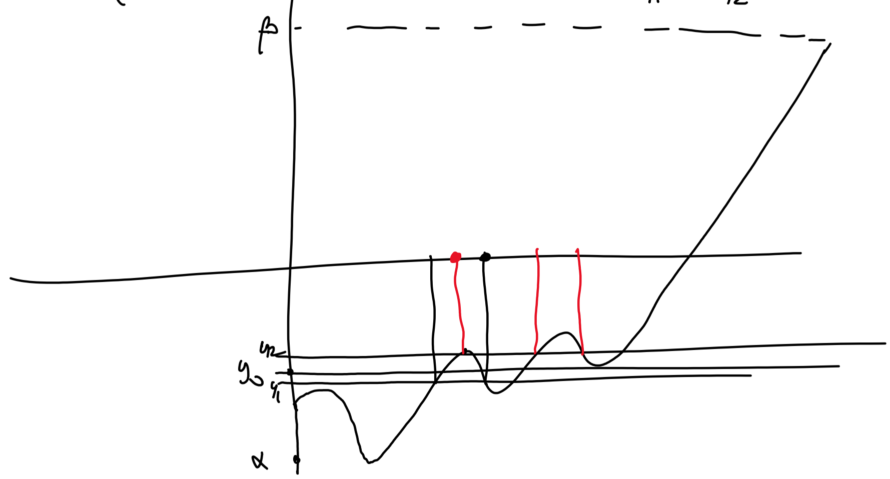
(ii) $\forall\ \alpha < y_0 < \beta \Rightarrow \exists\ x_0 \in I \mid f(x_0) = y_0$

(iii) $\forall\ x_1$ e $x_2 \in I$, f assume tutti i valori tra $f(x_1)$ e $f(x_2)$.

Dim (ii) $\alpha < y_0 < \beta \Rightarrow \exists\ y_1$ e $y_2 \in im(f) \mid \alpha < y_1 < y_0 < y_2 < \beta$

$\Rightarrow \exists\ x_1, x_2 \in I \mid f(x_i) = y_i$

Consideriamo la funzione $F(x) := f(x) - y_0$ sull'intervallo chiuso J di estremi x_1 e x_2 ($x_1 \neq x_2$ ovviamente se fosse $x_1 = x_2$ $\underset{y_1}{f(x_1)} = \underset{y_2}{f(x_2)}$ ma $y_1 < y_2$)



$F(x_1) \cdot F(x_2) = (f(x_1) - y_0)(f(x_2) - y_0) = (y_1 - y_0) \cdot (y_2 - y_0) < 0$

$F \in C(J) \Rightarrow \exists\ x_0 \in \mathring{J} \mid F(x_0) = 0$ (TZO)

$\Updownarrow$

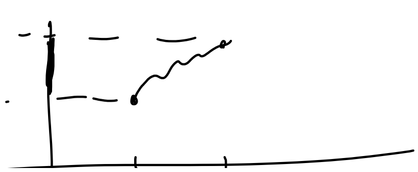
$f(x_0) - y_0 = 0$ ovvero $f(x_0) = y_0$.

(iii) $x_i \in I$ $\quad c = \min\{f(x_1), f(x_2)\} \geq \alpha$, $d = \max\{f(x_1), f(x_2)\} \leq \beta$

Vogliamo dim che $\forall\ c \leq y_0 \leq d$, $\exists\ x_0 \in I \mid f(x_0) = y_0$

Se $c = d \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$, la tesi è vera.

Se $c < d \Rightarrow \alpha \leq c < y_0 < d \leq \beta \overset{(ii)}{\Longrightarrow} \exists\ x_0 \mid f(x_0) = y_0$. ▨



$x_1 \quad x_2$

Corollario $f \in C(I)$ I intervallo $\Rightarrow$ $f(I)$ è un intervallo.

Segue da (ii) e dalla definizione di intervallo

Definizione alternativa di radice n-ma (più semplice ma meno elementare)

Sia $n \geq 2$ $\quad \overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty)$

$x \in [0,+\infty) \mapsto x^n$

$x^n \geq 0$, $x^n > 0$ se $x > 0$, $x \mapsto x^n$ è strett. crescente $\Rightarrow$ $\boxed{\text{invertibile}}$

T.V.I.

$x \mapsto x^n \in C([0,+\infty))$

$\inf\limits_{[0,+\infty)} x^n = \min\limits_{[0,+\infty)} x^n = 0$, $\sup\limits_{[0,+\infty)} x^n = +\infty$ $\Rightarrow$ x^n assume tutti i valori tra $[0,+\infty)$

$f(x) := x^n \qquad f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$ per definizione.

$f^{-1}(y)$ è l'unico $x \mid x^n = y$

$\sqrt[n]{y} = x \rightarrow x^n = y$

$\forall y \in \operatorname{im}(f)$ $\exists! \; x \mid f(x) = y$ (Definizione di funzione inversa)

$\exists! \; x \mid x^n = y \qquad x = \sqrt[n]{y}$

Ora abbiamo anche dimostrato che $\boxed{\operatorname{im}(f) = [0,+\infty)}$ per il T.V.I e $x^n \to +\infty$

$x \in \overline{\mathbb{Q}_+} \mapsto x^n \in \overline{\mathbb{Q}_+}$

Limite e continuità per funzioni COMPOSTE

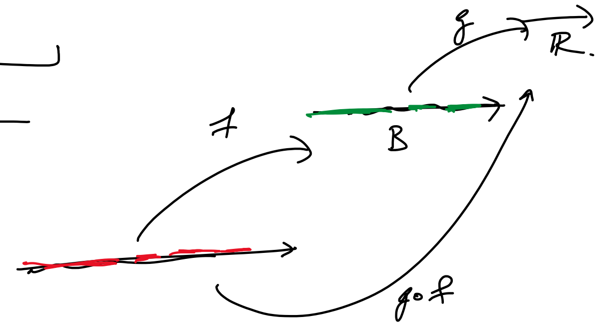
$\boxed{\operatorname{im}(f) \subseteq \operatorname{dom}(g)}$

(H) **Teorema** Siano A, B insiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ e $\boxed{f : A \to B \text{ e } g : B \to \mathbb{R}}$

$x_0 \in \mathcal{D}^* A$, $y_0 \in \mathcal{D}^* B$, $L \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = L$. Assumiamo una delle seguenti ipotesi

(i) $f(x) \neq y_0$ vicino a x_0, (ii) g è continua in y_0 ($y_0 \in B$, $L \in \mathbb{R}$, $g(y_0)=L$)

Allora, $\underbrace{\lim_{x\to x_0} g\circ f(x) = \lim_{y\to y_0} g(y) = L}$ (*)

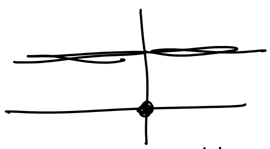


Attenzione! $A = B = \mathbb{R}$

$g(y) := \operatorname{sgn}^2 y$, $f(x) \equiv 0$

$x_0 = y_0 = 0$, $L = \lim_{y\to 0} \operatorname{sgn}^2(y) = 1$

$\lim_{x\to x_0} g\circ f(x) = \lim_{x\to x_0} g(0) = 0$. $\Rightarrow$ (*) in questo caso non vale



Dim. Sia V un intorno di L. Poiché $\lim_{y\to y_0} g(y) = L$

$\exists$ un intorno U di y_0 | $g(y) \in V$, $\forall\, y \in B\cap U \setminus \{y_0\}$

So che il $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ $\exists$ un intorno I_1 di x_0 |

$\rightarrow f(x) \in U \quad \forall\, x \in I_1 \cap A \setminus \{x_0\}$

Se vale (i) $\Leftrightarrow$ $\exists\, I_2$ intorno di x_0 | $f(x) \neq y_0 \quad \forall\, x \in I_2 \cap A \setminus \{x_0\}$

$I = I_1 \cap I_2 \Rightarrow f(x) \in B \cap U \setminus \{y_0\}$

$g(f(x)) \in V$ (**)

Nel caso (ii) $g\circ f(x) \in V$, $\forall\, x \in (I_1 \cap A)\setminus\{x_0\}$

o $f(x) \neq y_0 \overset{(**)}{\Rightarrow} g\circ f(x) \in V$ $\quad f(x) = y_0 \Rightarrow g\circ f(x) = g(y_0) = L \in V$

Corollario 1: la composizione di funzioni continue è continua!

(segue (ii))

Corollario 2 (cambio di variabile nei limiti)

Siano f e g come sopra e $\underbrace{f \text{ iniettiva vicino a } x_0}$

Allora $\lim g\circ f = \lim g(y)$ ||

Allora $\lim_{x\to x_0}$ ... $y\to y_0$.

f non può assumere il valore y_0 più di una volta vicino a x_0.

$$\boxed{\lim_{y\to y_0} g(y) \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to x_0} g\circ f(x)}$$

$y=f(x)$

con f iniettiva

ESERCIZI

ES. 2.21 (variato.) Dimostrare (per induzione) che

$$\boxed{e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot en \quad , \forall\, n\in\mathbb{N}}$$

$$\boxed{e \leq \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n} \leq en}$$

Versione primordiale della formula di Stirling

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 1.}$$

$\underbrace{n! \geq e\left(\frac{n}{e}\right)^n}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$

Per $n=1$ $\quad 1! = e\left(\frac{1}{e}\right)^1 = 1$ ✓

Assumiamo che $n! \geq e\left(\frac{n}{e}\right)^n$ $\qquad (n+1)! \geq e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$ TESI

$$(n+1)! = (n+1)\,n! \geq (n+1)\, e\left(\frac{n}{e}\right)^n = (n+1)^{n+1} e^2 \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{(n+1)^n}\frac{1}{e}$$

$$= \underbrace{e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}} e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$> e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \checkmark$$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \nearrow e$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \searrow e$