lunedì 26 ottobre 2020 08:18

Teorema $\forall x \geq 0 \ \exists! \ y \geq 0 . \ y^n = x$
$\forall n \in \mathbb{N}$

Riassunto della dimostrazione.

$$R = R_n := \{ t \geq 0 \mid t^n \leq x \}$$

. $y = \sup R_n$.

Unicità facile e deriva da una identità algebrica

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

Corollario 1 $a \neq b$, $a, b \geq 0$, $a^n > b^n \iff a > b$

Corollario 2 (i) $x . \{t \geq 0\} \to x^n$ è strett. crescente ($\Leftarrow$)
(ii) $x . \{t \geq 0\} \to x^{\frac{1}{n}}$ " " " ($\Rightarrow$)

Def. $y = \sup R_n =: \sqrt[n]{x} := x^{\frac{1}{n}}$.

Def $n < 0$, $a > 0$ $\boxed{a^n := (a^{-n})^{-1}}$
$a^0 := 1$.

$n = -2$

$$a^0 = a^{2-2} = a^2 \cdot a^{-2} = a^2 \cdot (a^{-(-2)})^{-1} = a^2 \cdot (a^2)^{-1} = 1.$$

Proprietà delle potenze

- $\forall n, m \in \mathbb{Z}$, $\forall a, b > 0$

(i) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

(ii) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

(iii) $a^n b^n = (ab)^n$

Def a^{r} con $r \in \mathbb{Q}$, $a>0$ $\quad a^r := a^{\frac{p}{q}}$, dove $r = \frac{p}{q}$

DEF. p, q come nel lemma
$$a^{\frac{p}{q}} = (a^p)^{\frac{1}{q}}$$

Lemma $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $a>0$. Allora $(a^p)^{\frac{1}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p$.

Es Dim. che $(a^{dp})^{\frac{1}{dq}} = (a^p)^{\frac{1}{q}}$

Dim $a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{dp}{dq}}$ $\blacksquare$

Prop. $a, b > 0$, $r, s \in \mathbb{Q}$. Allora

(i) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

(ii) $(a^r)^s = a^{rs}$

(iii) $a^r b^r = (ab)^r$

$x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. $x^2 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\nexists\, y \in \mathbb{R} \mid y^2 = x$, se $x<0$.

$x < 0$ n dispari $(n=5)$ $\exists\, y \in \mathbb{R} \mid y = x$

Esempio $x = -8$ $\exists\, y \in \mathbb{R} \mid y^3 = -8$? Sì $y = -2$

Def. Se $n \in \mathbb{Z}$, n dispari $(\Longleftrightarrow n = 2k+1,\ k \in \mathbb{Z})$

e $x < 0$, $x^{\frac{1}{n}} := -(-x)^{\frac{1}{n}}$

Corollario $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, n dispari $\exists!\, y \in \mathbb{R} \mid y^n = x$

[Qual è il valore di $(-8)^{2/6}$?] R: $\boxed{(-8)^{\frac{2}{6}} = -2}$ $\leftarrow$ $\boxed{\frac{2}{6} = \frac{1}{3}}$ $\leftarrow$

$\boxed{-2 = (-8)^{\frac{2}{6}} \overset{!}{=} \left((-8)^2\right)^{\frac{1}{6}} \overset{\checkmark}{=} 2}$

no

$\left(\underbrace{(-8)^{\frac{1}{6}}}\right)$ $\left((-8)^{\frac{1}{6}}\right)^6 = -8$

≥ 0.

In $\mathbb{R}$ $\nexists$ le radici pari di numeri negativi

$x < 0$ $n = 2k$, $k \neq 0$

$x^{\frac{1}{n}}$ $\nexists$ in $\mathbb{R}$.

Sia $n = 2k+1$ $k \in \mathbb{Z}$

Unicità ... di radici dispari ...

$$x^{\frac{1}{n}} = y^{\frac{1}{n}}$$

Se $x, y \geq 0 \Rightarrow x = y$

Se $x < 0 \leq y$ $\quad x^{\frac{1}{4}} < 0$ contradd

$x, y < 0$

$$\left.\begin{array}{l} x^{\frac{1}{4}} := -(-x)^{\frac{1}{4}} \\ \quad \shortparallel \qquad\qquad \shortparallel \\ y^{\frac{1}{4}} = -(-y)^{\frac{1}{4}} \end{array}\right\} \Rightarrow (-x)^{\frac{1}{4}} = (-y)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow -x = -y$$

$$\Rightarrow x = y. \ \blacksquare$$

Morale x^r anche per $r \in \mathbb{Q}$ | $r = \frac{p}{q}$ con $(p, q) = 1$. e q dispari

max comun divisore

$r = \frac{2}{6} \rightarrow (1, 3)$

ESERCIZI SU SUP E INF

Dall' Esonero del 13/11/2019.

Dimostrare che $A = \left\{ x = 7 - \frac{1}{n^2} \middle| n \in \mathbb{N} \right\} \Rightarrow \underline{\sup A = 7} \notin A$

... mai $7 \notin A$

$x = 7 - \frac{1}{n^2}$ $\exists$ ...

7 è un maggiorante di A: $7 \geq 7 - \frac{1}{n^2}$

$\iff \frac{1}{n^2} \geq 0$ ✓ (Oss. $7 > 7 - \frac{1}{n^2} \iff \frac{1}{n^2} > 0 \iff n > 0$)

7 è il più piccolo dei maggioranti:

DUE MODI 1) Per assurdo: supponiamo $\exists$ $x < 7$, maggiorante di A

se $x < 7$ è maggiorante di A $\iff 7 > x \geq 7 - \frac{1}{n^2} \leftarrow$

$$\underbrace{7 - x}_{>0} \leq \frac{1}{n^2}$$

$7 - x =: \varepsilon > 0$

$$\varepsilon \leq \frac{1}{n^2} \iff n^2 \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

ma $n \leq n^2 < \frac{1}{\varepsilon}$ falso perché $\mathbb{N}$ non è limitato sup

ovvero (per Archimede) $\exists$ $N \in \mathbb{N}$ | $N > \frac{1}{\varepsilon}$.

2) Usare la caratterizzazione del sup

$$\alpha = \sup A \iff \begin{cases} \alpha \text{ è un maggiorante di } A \\ \forall\, t < \alpha \ \exists\, a \in A \mid a > t \end{cases}$$

negaz. $\forall\, a \in A \quad a \le t \iff t$ è maggi. di A

Sia $t < 7$ vogliamo trovare $n \mid 7 - \frac{1}{n^2} > t$

$\iff \varepsilon := 7 - t > \frac{1}{n^2} \iff n^2 > \frac{1}{\varepsilon}$. Sia $N > \frac{1}{\varepsilon} \implies$

$\varepsilon > 0$ $\qquad N^2 \geq N > \frac{1}{\varepsilon}$ ✓

Es Si dimostri che $\forall\, n \geq 1$ $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$

Prove $n=1$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > \frac{1}{2}$ ✓

$$\sum_{k=2}^{4} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6+4+3}{12} = \frac{13}{12} > \frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=3}^{6} \frac{1}{k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{20+15+12+10}{60} = \frac{57}{60} > \frac{1}{2}$$

Proviamo per induzione

$n=1$, vero. Assumiamo $\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} \overset{?}{\leq} \sum_{k=(n+1)}^{2(n+1)} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}}_{\text{ip. indutt.}} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n}$$

$$\underset{\text{ip. indutt.}}{\geq} \frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} \overset{?}{\geq} \frac{1}{2}$$

$\sim$ vero

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} = \frac{(2n+2)n + (2n+1)n - (2n+1)(2n+2)}{(2n+1)(2n+2)n}$$

$$= \frac{\cancel{2n^2} + 2n + \cancel{2n^2} + n - \cancel{4n^2} - 6n - 2}{(2n+1)(2n+2)n} = \frac{-3n-2}{(\quad)} < 0.$$

non ha funzionato!

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{2n} \quad \boxed{\frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{2n}, \forall\ 0 \leq k \leq n}$$

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \underbrace{\frac{1}{n+0} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{\underset{n+n}{2n}}}_{n+1 \text{ termini}} \geq \frac{1}{2n} \cdot (n+1) > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

$\geq \frac{1}{2n}$

$\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}\ \forall,\ n \leq k \leq 2n$

Soluzione. $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{k=n}^{2n} 1 = \frac{n+1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

ES 7. Trovare sup e inf se $\exists$ e specificare se max/min di

$$A = \left\{ x > -\frac{1}{1+|x|} \ \middle|\ x|x| \leq \sqrt{x^2+10} \right\}$$

$$B = \left\{ x > -\frac{1}{1+|x|} \right\}$$

$\Leftrightarrow \quad x(1+|x|) > -1$

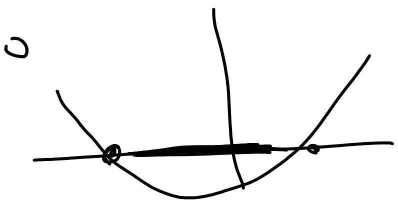
$x > -\frac{1}{1+|x|} \iff$

verificata se $x \geq 0$

Se $x < 0$, $x(1-x) > -1 \iff x^2 - x - 1 < 0$

(essendo $|x| = -x$)

$x_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$



$$f(x) = x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4} = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2 - 4c}{4}$$

Completare il quadrato!

$$= \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{\Delta}{4} \quad \text{con } \Delta = b^2 - 4c$$

$$f(x) = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{\Delta}{4}$$

ha due soluzioni se $\Delta > 0$
una soluzione se $\Delta = 0$
nessuna " se $\Delta < 0$

$$\left|x + \frac{b}{2}\right| = \sqrt{\frac{\Delta}{4}}, \text{ se } \Delta \geq 0$$

$|y| = c$, con $c > 0$ $\quad y = \dfrac{}{4}$

$x + \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}} \qquad x = -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}$

$\min_{\mathbb{R}} f = f\left(-\frac{b}{2}\right) = -\frac{\Delta}{4}$

$B = \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x \right\}$

$A = \left\{ x \in B \;\middle|\; x|x| \le \sqrt{x^2+10} \right\} = \left\{ x \;\middle|\; \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x \le \sqrt{\frac{1+\sqrt{41}}{2}} \right\}$

Guardiamo $x > 0$ / ($x \le 0$, $x \in B$, $x \in A$)

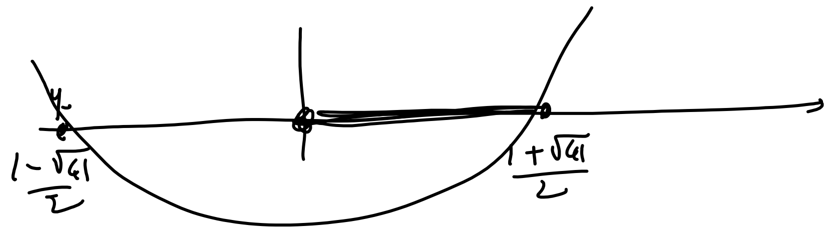
$x^2 \le \sqrt{x^2+10} \iff$

$x^4 \le x^2 + 10$

$x^4 - x^2 - 10 \le 0$, $y = x^2$

$y^2 - y - 10 \le 0$

$$y_I = \frac{1 \pm \sqrt{1+40}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{41}}{2}$$



$$x^2 \le \frac{1+\sqrt{41}}{2}$$

$$0 < x \le \sqrt{\frac{1+\sqrt{41}}{2}}$$

$$\boxed{A = \{a < x \le b\}}$$

$a = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $b = \sqrt{\frac{1+\sqrt{41}}{2}}$

max $A = b$, inf $A = a$ non è min

verificare per esercizio facile!!