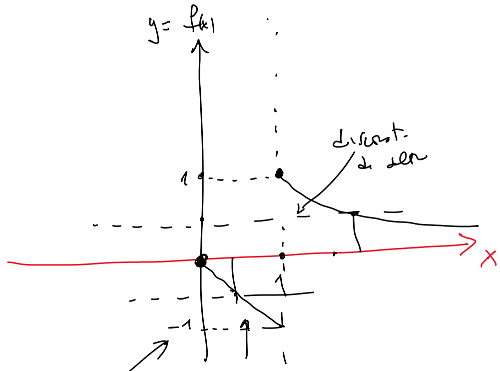
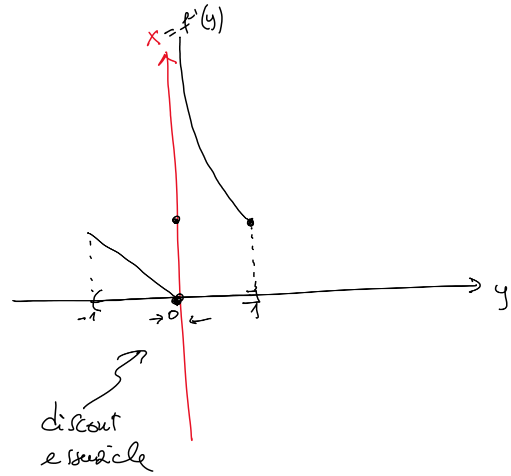
FUNZIONI INVERSE E LORO LIMITI

Esempio $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$



$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -1 \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$



$\mathrm{im}(f) = [-1,1] = \mathrm{dom}(f^{-1})$

$\lim_{x \to 0 = x_0} f(x) = 0 = y_0$

$\lim_{y\to 0} f^{-1}(y) \ \nexists$

$x_0 = 0 \longleftrightarrow y_0 = 0$

Proposizione (2.64) $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{im}(f) =: B$ e assumiamo f iniettiva (ossia invertibile) con inversa $g = f^{-1} : B \to A$.
Sia $x_0 \in \mathcal{D}^*A$, $y_0 \in \mathcal{D}^*B$ con $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$. Assumiamo che $\exists \lim_{y \to y_0} g(y)$.

Allora $\lim_{y \to y_0} g(y) = x_0$

Dim. Sia $L = \lim_{y\to y_0} g(y)$ Possiamo ora fare il cambio di variabile (Corollario 2.60)

$y = f(x)$ essendo f iniettiva vicino a x_0. Quindi.

$\lim_{y\to y_0} g(y) = \lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = x_0$ ■

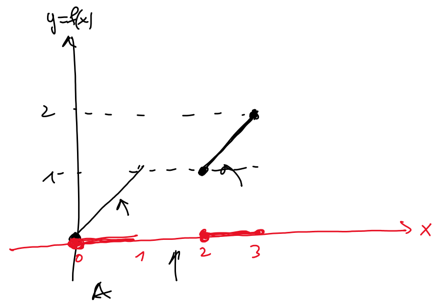
($g \circ f$ $\quad g$ composto f $\quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$)

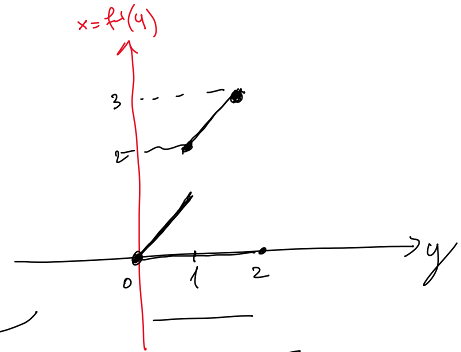
Applicazione principale

... continua f^{-1} ?

f continua e invertibile. Quando è ... e ... .

ESEMPIO !!





$f : \underbrace{[0,1) \cup [2,3]}_{A} \to [0,2]$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \le x < 1 \\ x-1 & \text{se } 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

$\text{dom}(f^{-1}) = [0,2]$

f è continua e invertibile

MA f^{-1} ha una discont. di salto in 1.

Teorema (2.66) (GUARDARE L'ERRATA CORRIGE) Sia I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ strettamente monotòna (e quindi invertibile).

Allora $f^{-1} : \text{im}(f) \to I$ è continua.

Dim* Possiamo assumere che f sia strettamente crescente (altrimenti consideriamo $-f$)

N.B. f^{-1} è strettamente crescente

$y_1 < y_2$ $\quad f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2) \implies f(x_2) < f(x_1)$ contraddiz.

$\underset{x_1}{\overset{\shortparallel}{f^{-1}(y_1)}}$ p.a. $\quad \underset{x_2}{\overset{\shortparallel}{f^{-1}(y_2)}}$ $\quad y_2 < y_1$

$J = \text{im}(f)$, $\quad y_0 \in J$ $\quad$ Se y_0 è isolato, per def. f^{-1} è cont. in y_0.

Supponiamo y_0 non isolato $y_0 \in DJ$ e consideriamo i limiti laterali

Supponiamo, in particolare, che y_0 sia un p.to di acc. sinistro.

$\forall\, y \in J,\ y < y_0 \implies f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) =: x_0 \in I$ $\qquad (1)$

Per il teorema dell'$\exists$ limiti per funzioni monotone

$$\lim_{y\to y_0^-} f^{-1}(y) = \sup_{\substack{y\in J\\ y<y_0}} \underbrace{f^{-1}(y)} =: \alpha \le x_0$$

$$\parallel$$

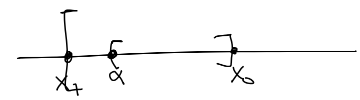
$$\sup \underbrace{\{ f^{-1}(y) \mid y\in J \text{ e } y<y_0\}}$$. e x_0 è un magg. di questo insieme (per (1))

Vogliamo dimostrare che $\alpha = x_0$.

Supponiamo, P.A., che $\underline{\alpha < x_0}$ (2)

Sia $\underline{y_1 \in J \quad y_1 < y_0}$. Per definizione di α

$$\underline{x_1} := \underline{f^{-1}(y_1)} \le \underline{\alpha}$$



Quindi

$$\boxed{[\alpha, x_0] \subseteq [x_1, x_0] \subseteq I}$$ ← USA L'IPOTESI CHE I È INTERVALLO.

Sia $\bar x$: $\alpha < \bar x < x_0$ e sia $\bar y = f(\bar x)$

$\bar y \in J$ e $\underline{\bar y < y_0}$ (essendo f stett. crescente)

$f(\bar x)$ $\quad$ $f(x_0)$

$$\alpha < \bar x = f^{-1}(\bar y) \le \alpha \quad \text{contraddizione.}$$

usando $\bar y < y_0$

Quindi $\alpha = x_0 = \lim_{y\to y_0} f^{-1}(y)$. Quindi f^{-1} è cont da sinistra

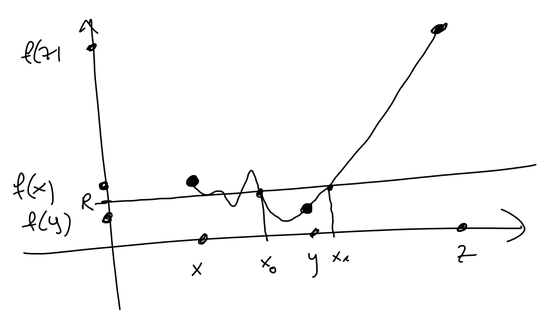
La continuità da destra si vede in modo analogo (Es.) ■

Prop. Sia f continua su I intervallo. Allora f è invertibile $\Leftrightarrow$ è stett. monotona

Dim. "$\Leftarrow$" ovvia

"$\Rightarrow$" Supponiamo, P.A., che f NON SIA STRETTAMENTE MONOTONA

$\Rightarrow \exists \; x < y < z$



$$\boxed{y \notin [\alpha, \beta]}$$

dove $\alpha = \min\{f(x), f(z)\}$

$\{f(x), f(z)\}$

$\beta = \max \{ \ldots \}$

CONSIDERIAMO IL CASO $\alpha = f(x)$ e $\beta = f(z)$

$y < \alpha$

$(y > \beta)$

$f(y) < R < f(x)$

e $f \in C([x,y])$

$\overset{T.V.I.}{\Longrightarrow} \exists \; x_0 \in (x,y) \mid f(x_0) = R$

$f(y) < R < f(z)$, $f \in C([y,z])$ $\overset{T.V.I.}{\Longrightarrow} \exists \; x_1 \in (y,z) \mid f(x_1) = R$ ▨

$x_0 < x_1 \quad f(x_0) = R = f(x_1)$

Contraddizione perché f strett. monotona e quindi INIETTIVA

ESERCIZI

Es 2.23 $\{a_n\}$ t.c. $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim a_{2n-1} = L \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = L$

($\{a_n\}$ una sottosuccessione di $\{a_n\}$ è una successione $b_k = a_{n_k}$

dove n_k è una succ strettamente crescente a valori in $\mathbb{N}$.

$2k \nearrow$, $\quad 2k-1 \nearrow \quad \{a_{2k}\}$ e $\{a_{2k-1}\}$

OSS. essendo n_k strett. crescente e a valori in $\mathbb{N}$. $\Big\}$ $n_k \nearrow +\infty$

$\boxed{n_k \geq k}$

succ. semplice che tende a $+\infty$

Infatti, Per induzione $n_1 \geq 1$ perché $n_1 \in \mathbb{N}$

Assumiamo che $n_k \geq k$, $\quad n_{k+1} > n_k \Rightarrow n_{k+1} \geq n_k + 1 \geq k+1$

Teor. $\quad$ ip. induttiva.

$b_n = a_{2n} \to L$, $\quad c_n = a_{2n-1} \to L$

$\forall \; V$ intorno di L $\exists \; M$ t.c.

$a_{2n}, a_{2n-1} \in V$ se $n > M$

$m = 2n \qquad n > M, \quad \frac{m}{2} > M \quad m > 2M$

Quindi $a_m \in V \quad \forall \; m \geq \overline{M} = 2M$, $\quad m \geq \overline{M} \Rightarrow$

$m = 2n-1 \qquad n > M, \quad \frac{m+1}{2} > M$

$m > 2M-1$

ES 2.24 $\alpha > 0$ studiare il $\lim a_n$ dove

$a_1 = \alpha$ e per $n \geq 1$ $\boxed{a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}} < a_n$

$L = 0$

Se $a_n \to L \geq 0$ $\quad$ $L \neq 0$, $L = \frac{L}{1+L}$ $\quad$ $1+L = 1 \Leftrightarrow L = 0$ assurdo

Oss. $a_1 > 0$, $a_n > 0$, $\forall n$.

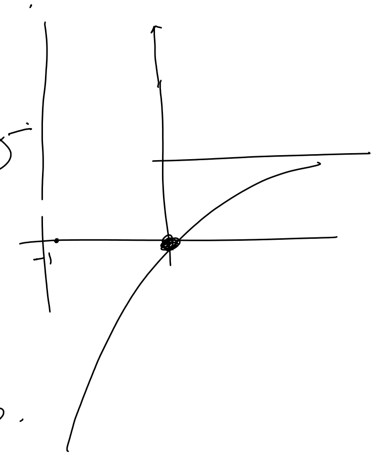
Se il $\lim a_n \exists \Rightarrow \lim a_n = 0$

Esempio $\alpha = 1$ $\quad a_1 = 1 \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

$a_4 = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$, $\quad a_n = \frac{1}{n}$

per induzione $\quad a_{n+1} = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1}$ ✓

.. $f(x)$ $\quad a_{n+1} = f(a_n)$ $\quad f(x) = \frac{x}{1+x}$



f è strett. crescente

$0 < a_{n+1} < a_n \overset{\text{T.F.M.}}{\Longrightarrow} \exists \lim a_n \Rightarrow \lim a_n = 0$.