mercoledì 28 ottobre 2020 08:12

TEORIA DEI LIMITI (CAP 2)

1° ESONERO 13/11

DEF $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$

SIMBOLI NUOVI

NON E' L'OPPOSTO DI $+\infty$

$\underline{+2}$ e $\underline{-2}$ $\quad +2 = 2$

Estendiamo la relazione d'ordine $\leq$ a $\mathbb{R}^*$ ponendo

$$-\infty \leq x \leq +\infty \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^* \qquad (-\infty < +\infty)$$

N.B. se $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \pm\infty \Rightarrow -\infty < x < +\infty$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$

DEF. $A \neq \emptyset$ NON LIMITATO SUP allora $\sup A = +\infty$

" " INF " $\inf A = -\infty$

Ad esempio $\sup \mathbb{N} = +\infty$, $\inf \mathbb{N} = \min \mathbb{N} = 1$

$\sup \mathbb{Z} = +\infty$, $\inf \mathbb{Z} = -\infty$

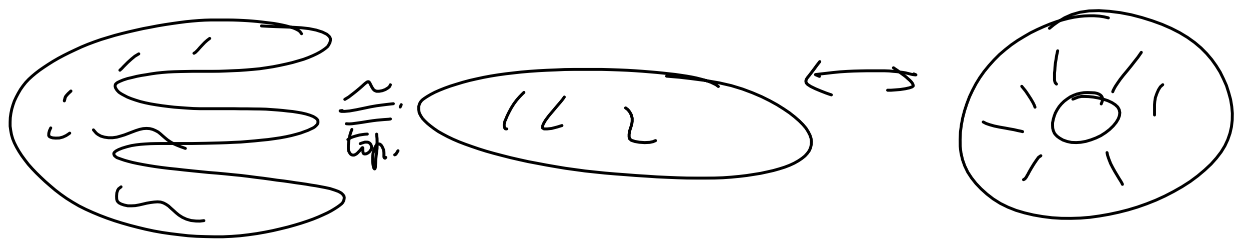
Comportamento di una funzione $f(x)$ quando x si avvicina ad un x_0

Intuitivamente f ha limite L per x che si avvicina ("tende") a x_0 se più ci avviciniamo a x_0 più, valori di f si avvicinano a L.

se $\underbrace{x \longrightarrow}_{\text{tende}} x_0$ $\quad$ $\underbrace{f(x) \longrightarrow}_{\text{tende}} L$

VICINO ??

La "vicinanza" è un concetto topologico non geometrico o metrico



INTERVALLI

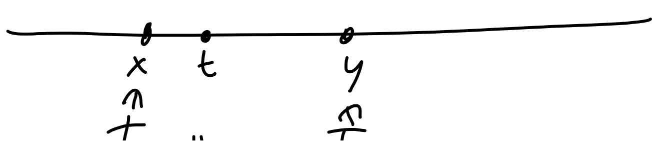
Esempi $\mathbb{R}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ CHIUSO, $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} \leq x < \frac{1}{\pi}\}$

$a = 0 \in I$, $a = \min I$, $b = +\infty$

$a = 0$, $b = +\infty$, $a, b \notin I$

$a = -\sqrt{2} = \min \in I$, $\frac{1}{\pi} = b = \sup I \notin I$

DEF $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo se $\forall\ x < y$, $x, y \in I$ e $x < t < y \implies t \in I$



$$I \quad \Downarrow \quad I$$

$$t \in I.$$

- $a = \inf I$, $b = \sup I$ $\quad a, b \in \mathbb{R}^*$ si chiamano gli ESTREMI dell'intervallo

N.B. a e b possono o meno appartenere a I

- se gli estremi (FINITI) a e b appartengono ad I diremo che l'intervallo I è CHIUSO.
  " " NON APPARTENGONO " " " " APERTO

- Se I è un intervallo limitato ossia $a > -\infty$, $b < +\infty$
  allora chiamiamo LUNGHEZZA o MISURA di I, $|I| := \ell(I) := b - a$

- notazione un intervallo di estremi a e b si denota con

  (a,b) se gli estremi non appartengono ad I

  $[a,b)$ se $a \in I$, etc

  $[a,b]$ se $a,b \in I$, (intervallo limitato e chiuso)

  $[a,+\infty)$ è chiuso

  $(-\infty, b]$ " "

$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ (unico intervallo sia aperto che chiuso)

Oss. $\boxed{(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}}$ $(a, b \in \mathbb{R}^*)$

Dim. $\underbrace{\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}}_{A} \subseteq (a,b)$

Qui $a := \inf(a,b)$

$\inf A = a$

a è un minorante (N.B. $-\infty$ è sempre un minorante, $+\infty$ " " MAGGIORANTE)

& $t > a$ $\quad a < t$

se $a = -\infty$, $t-1 \in A$, $t-1 > -\infty$

se $a > -\infty$, $a < \frac{t-a}{2}$ & $t < b$

$a < \frac{b-a}{2} \in A$ $\quad b < t$

$(a,b) \subseteq \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ ✓

$$\boxed{x \in (a,b) \Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \inf(a,b) \notin (a,b)}}{a} < x < b}$$

altra dimostrazione: $\overbrace{\{x \mid a < x < b\}}^{A}$ è un intervallo (ovviamente a e $b \notin A$)

siano $x < y$ due punti di A $\quad a < x < y < b$

sia $x < t < y \Rightarrow a < x < t < y < b \Rightarrow t \in A$ ✓

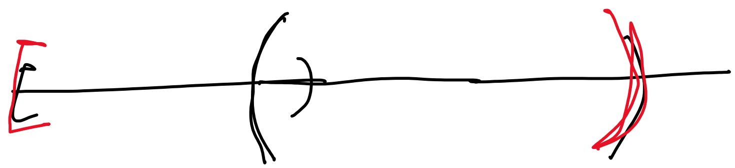
I, J intervalli $\Rightarrow I \cap J$ è un intervallo

- I e J sono intervalli e $I \cap J \neq \emptyset$ $\Longrightarrow$ $\begin{cases} I \cap J \text{ è un intervallo} \\ I \cup J \end{cases}$

Non è vero, in generale, che $I \cup J$ è un intervallo.

$x \notin (0,1) \cup (2,3)$ se $1 \leq x \leq 2$

Se $I \cap J \neq \emptyset \Longrightarrow I \cup J$ è un intervallo



Può capitare che I, J intervalli $I \cap J = \emptyset$ ma $I \cup J$ è un intervallo

$I = (-\infty, 1]$, $J = (1, +\infty)$, $I \cup J = \mathbb{R}$, $I \cap J = \emptyset$

DEF! Un INTORNO di $x_0 \in \mathbb{R}$ è un intervallo APERTO che contiene x_0.

" " " $+\infty$ è un intervallo $(a, +\infty)$

" " " $-\infty$ " " $(-\infty, b)$

N.B. Per definizione, un intorno U di $x_0 \in \mathbb{R}$ CONTIENE x_0

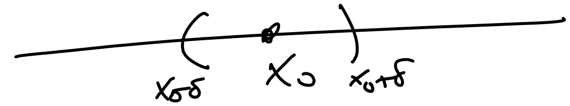
" " " $\pm\infty$ NON CONTIENE $\pm\infty$

Se $x_0 \in \mathbb{R}$ un intorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ si dice simmetrico

$(x_0-\delta,\ x_0+\delta) = \{x \mid x_0-\delta < x < x_0+\delta\} = \{x \mid -\delta < x-x_0 < \delta\}$

$= \{x \mid \underbrace{|x-x_0|}_{} < \delta\}$

$\underline{\underline{d(x,x_0)}}$ distanza di x da x_0 $\quad \overset{\delta}{\longleftrightarrow}$



$|(x_0-\delta,\ x_0+\delta)| = \ell((x_0-\delta, x_0+\delta)) = 2\delta$

$\ell := x_0+\delta-(x_0-\delta) = 2\delta$

DEF. $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

(a) x è un PUNTO INTERNO di A se $\exists\, U$ intorno di x $\quad U \subseteq A$.

Ad esempio quali sono i punti interni di $[1,3)$

l'insieme dei punti interni di $[1,3)$ è $(1,3)$

Se 1 fosse interno $\exists\, U$ INTORNO di 1, $U \subseteq [1,3)$

$U=(a,b)$, $\underline{a<1<b}$ $\quad U \subseteq [1,3)$ $\quad x<1$ $\quad x \notin [1,3)$

$a<\underline{t}<1$, $t \in U$, $\underline{t \geq 1}$ NO!

$x \in [1,3)$ $\quad x \neq 1$ $\Rightarrow$ $x \in (\underline{1,3}) = U$

$x \in [1,3)$

<u>Def</u> L'insieme dei punti interni ad A si denota con $\mathring{A}$ =. INTERNO di A

$\mathring{[1,3)} = (1,3)$ $\left(A = [1,3)\ ,\ \mathring{A} = (1,3) \right)$

$A = [0,1] \cup [2,3]$

$\mathring{A} = (0,1) \cup (2,3)$

$\underline{\{x_0\}}$, $\{1\} \neq 1$

INSIEME NUMERO

<u>Es</u> Determinare $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$

$\frac{p}{q}$ con $q \in \mathbb{Z}$ $q \neq 0$ $p \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ $\left(\text{se } q < 0 \quad (-p)\cdot(-q)^{-1} \right)$

$A = \{1\}$ $\mathring{A}$

$= [1,1]$

$|A| = 0$

<u>Oss</u> $\underline{\mathring{A} \subseteq A}$ $x \in A \mid \exists U$ int. di x, $U \subseteq A$

$x \in \underline{U} \subseteq A \Rightarrow x \in A$.

se $x \in \mathbb{Q}$ e U è un intervallo che contiene x,

ma ogni intervallo contiene numeri <u>irrazionali</u> $\not\Rightarrow$

non può essere $\underline{U \subseteq \mathbb{Q}}$.

$\mathring{\mathbb{Z}} = \emptyset$ (facile)

(ii) $x \in A$ si dice ISOLATO se $\exists$ un intorno U di x t.c.

$U \cap A = \{x\}$

__Es__ __$x \in \mathbb{Z}$__, x è isolato $\quad (x-1, x+1) \cap \mathbb{Z} = \{x\}$

Quali sono i p.ti isolati di $\mathbb{Q}$? $\quad$ __$\mathcal{I}(\mathbb{Q}) = \emptyset$__

(L'insieme dei punti isolati di A lo denotiamo con $\mathcal{I}(A)$)

$x \in \mathbb{Q}$, $\quad (a,b) \ni x \quad$ $\#\, \underline{(a,b) \cap \mathbb{Q}} = \#\mathbb{N}$.

$A \ni x \overset{\text{def}}{\iff} x \in A$

(iii) $x \in \mathbb{R}^*$ si dice PUNTO DI ACCUMULAZIONE (O PUNTO LIMITE) di $A \subseteq \mathbb{R}$.

se $\forall$ U intorno di x $\quad (U \cap A) \setminus \{x\} \neq \emptyset$

$\#A = \#B$

$\iff A \cong B$

__Intuitivamente__. in A ci sono punti diversi da x ma arbitrariamente vicini ad x

L'insieme dei punti di accumulazione di A si denota con $\mathcal{D}^*A \subseteq \mathbb{R}^*$ e si chiama il __DERIVATO di A__.

$$\underline{\mathcal{D}A = \mathcal{D}^*A \cap \mathbb{R}.}$$

Cosa vuol dire che $\quad +\infty \in \mathcal{D}^*A$

$+\infty \in \mathcal{D}^* A \iff \sup A = +\infty \iff$ <u>A NON È LIMITATO SUP</u>

$\underline{+\infty \in \mathcal{D}^* \mathbb{N} = \{+\infty\}}$, $\mathcal{D}^* \mathbb{Z} = \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$

$-\infty \in \mathcal{D}^* A \iff \inf A = -\infty \iff$ A NON È LIMITATO INF

$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R} \neq \mathcal{D}^* \mathbb{Z}$.