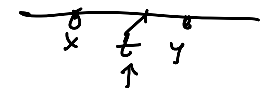
venerdì 30 ottobre 2020 08:15

HIGHLIGHTS VOLTA PRECEDENTE

DEF. I è un INTERVALLO se $\forall\ x \leq y$ in I e $x \leq t \leq y \Rightarrow t \in I$



- INTERVALLO APERTO $\quad (a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, $a < b$.

- INTORNO DI UN PUNTO $x_0 \in \mathbb{R}$: un intervallo aperto che contiene x_0

- $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, un punto INTERNO di A è un punto x_0 t.c. $\exists$ un intorno U di x_0 contenuto in A: $\quad x_0 \in U \subseteq A$

intervallo aperto

L'insieme di tutti i punti interni di A si chiama l'INTERNO di A e si denota $\mathring{A}$.

- x_0 è un punto di ACCUMULAZIONE (o PUNTO LIMITE) per $A \subseteq \mathbb{R}$ se $\forall$ intorno U di x_0, $\quad U \cap A \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$

(o sia, in $A \cap U$ ci sono punti $x \neq x_0$)

N.B. x_0 PUÒ APPARTENERE AD A MA PUÒ ESSERE ANCHE IN A^c.

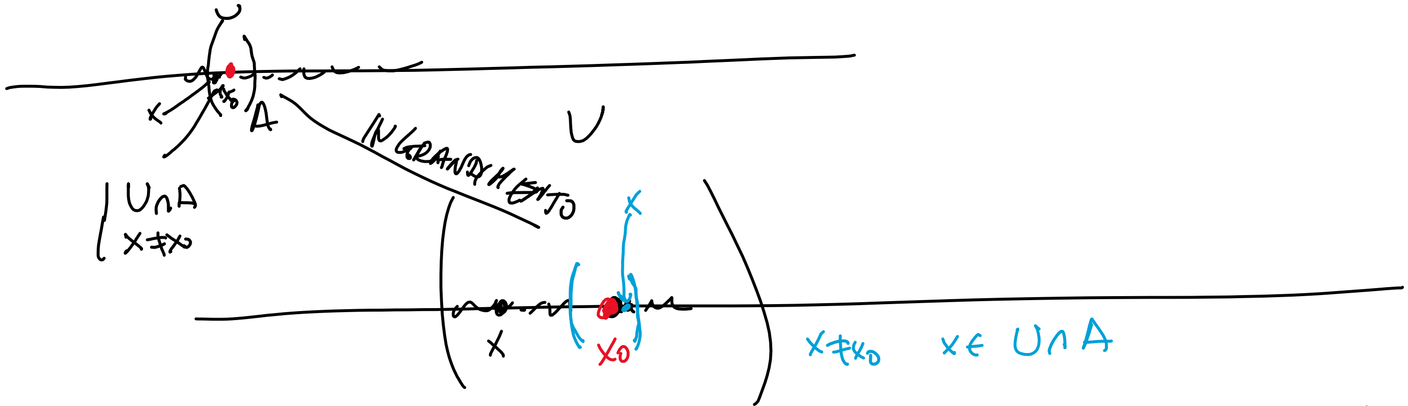
L'insieme dei punti di accumulazione di A si chiama il

DERIVATO di A e si denota $\mathcal{D} A$

- x_0 si chiama PUNTO ISOLATO di A se $\exists U$ intorno di x_0

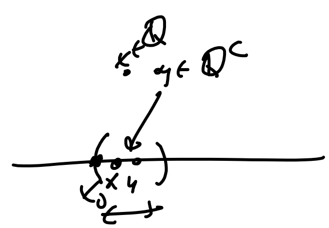
$$U \cap A = \{x_0\}$$

L'insieme dei punti isolati di A lo denotiamo con $\mathcal{I}(A)$



se $x_0 \in \mathcal{D} A$, ci sono punti $x \in A$, $x \neq x_0$, arbitrariamente VICINI a x_0

$\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}^c$ NON HANNO PUNTI ISOLATI

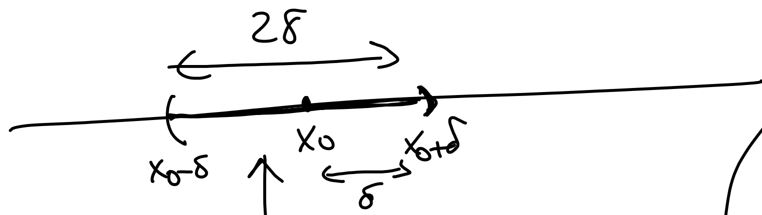


$\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{D}\mathbb{Q} \cap \mathcal{D}\mathbb{Q}^c$

$$\mathcal{D}\mathbb{Q} = \mathcal{D}\mathbb{Q}^c = \mathbb{R}$$

INTERVALLI APERTI SIMMETRICI RISPETTO A $x_0 \in \mathbb{R}$: $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ con $\delta > 0$

• INTERVALLI APERTI



"sfera unidimensionale di raggio δ e centro x_0"

$$\{x\in\mathbb{R} \mid \underline{\underline{|x-x_0|<\delta}}\} =: I_\delta(x_0)$$

Infatti:

$$x_0-\delta < x < x_0+\delta \iff -\delta < x-x_0 < \delta \iff |x-x_0|<\delta$$

$$|I_\delta(x_0)| := \text{lunghezza di } I_\delta(x_0) = 2\delta$$

$\pm$ INFINITO $\quad \pm\infty \quad$ (ALTRI $\underline{\underline{\alpha, \omega}}$)

• $\mathbb{R}^* := \mathbb{R}\cup\{-\infty\}\cup\{+\infty\}$ "RETTA ESTESA"

$x\in\mathbb{R}^*$: $x\in\mathbb{R}$ oppure $x=+\infty$ o $x=-\infty$

• (a,b) intervalli aperti, $\boxed{-\infty\le a<b\le+\infty.}$

$$-\infty<+\infty$$
$$\forall x\in\mathbb{R} \quad -\infty<x<+\infty$$

Es. $(1,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid x>1\}$

—

• INTORNI di $+\infty$ e $-\infty$

INT DI $+\infty$. INTERVALLO APERTO NON LIMITATO SUP. $\Leftrightarrow (a,+\infty)$, $a<+\infty$

INT. DI $-\infty$. " " " " INF $\Leftrightarrow (-\infty, b)$, $b>-\infty$

N.B. INTORNI DI $+\infty$ o $-\infty$ NON CONTENGONO $+\infty$ o $-\infty$

N.B. NON $\exists$ INTORNI SIMMETRICI DI $\pm\infty$

N.B. $+\infty$ o $-\infty$ POSSONO ESSERE PUNTI DI ACCUMULAZIONE

$+\infty \in \mathcal{D}^*A \iff$ A NON È LIMITATO SUP $\overset{DEF}{\iff} \sup A = +\infty$

$-\infty \in \mathcal{D}^*A \iff$ A NON È LIMITATO INFER $\overset{DEF}{\iff} \inf A = -\infty$

DEFINIZIONE DI LIMITE

DEF

Data una funzione $f: A \to \mathbb{R}$, ($A \neq \emptyset$).

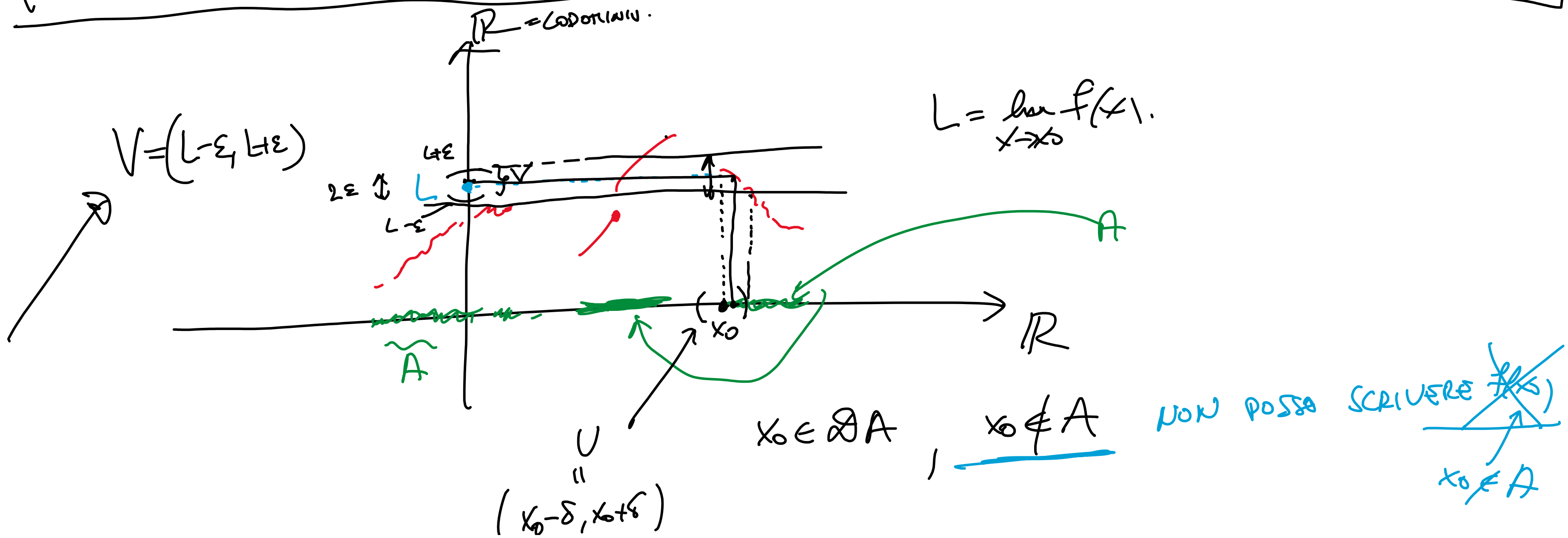
Dato un punto $x_0 \in \mathcal{D}^* A$

Dato $L \in \mathbb{R}^*$

DIREMO CHE L è il LIMITE DI f PER x CHE TENDE A x_0 e SCRIVEREMO $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$ se

$\forall$ INTORNO V DI L $\exists$ un intorno U di x_0 t.c.

$\forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$ si ~~ha~~ ha $f(x) \in V$.



$\forall \; x \in I_\delta(x_0) \cap A \implies f(x) \in I_\varepsilon(L)$

o più esplicitamente

$\forall \; \varepsilon > 0 \;\; \exists \; \delta > 0 \;\; \Big|$ se $\underset{x \neq x_0}{0 < |x - x_0| < \delta}$, $x \in A \implies |f(x) - L| < \varepsilon$

$(L, x_0 \in \mathbb{R})$.

$x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$ $\qquad f(x) \in V$

$\forall$ intorno di L, $V = (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

$\exists \; U$ intorno di x_0,
$U = I_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

ESEMPIO $\quad f(x) = x^2 \quad$ CON DOMINIO $\mathbb{R} = A$.

$x_0 = 0$

(N.B $\;$ se $x_0 \in \mathring{A} \implies x_0 \in \mathcal{D}A$
$\mathring{A} \subseteq \mathcal{D}A$)

Dimostriamo che $\lim_{x \to 0} x^2 = 0 = L$

$x^2 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\forall \; x \neq 0$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$

$|x| < \delta$ $(x \in \mathbb{R})$

$(x \in (-\delta, \delta))$

$\Updownarrow$

$-\varepsilon < x^2 < \varepsilon$

$\delta = \sqrt{\varepsilon}$

$-\varepsilon < 0 < x^2 < \varepsilon$

$x \neq 0$

$\Leftrightarrow \; x < \sqrt{\varepsilon}$

$(x > 0)$.

δ non è unico

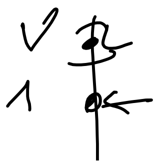
un'altra δ che va bene è $\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$, $\boxed{0 < \delta \leq \sqrt{\varepsilon}}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ funzione CARATTERISTICA di $\mathbb{Q}$ $\left(\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases} \right)$

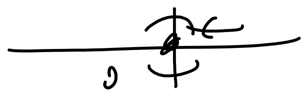
FUNZIONE DI DIRICHLET

$\exists$ limite per $x \to 0$ di $f(x)$?



SONDAGGIO $\quad$ 13+10 SÌ - 23

9+11 NO - 20



RISPOSTA E' NO

$L=0$

$\forall\, 1>\varepsilon>0,\ V=(-\varepsilon,\varepsilon)$ se $\varepsilon<1.$

δ

DOVREBBE ESISTERE UN INTORNO DI $x_0=0$.

$\forall\ -\delta<x<\delta \quad f(x)=0$

in ogni intorno U di 0 $\exists\ x\in\mathbb{Q}\cap U$ dove $f(x)=1$.

$\exists\ y\in\mathbb{Q}^c\cap U$ dove $f(x)=0$.

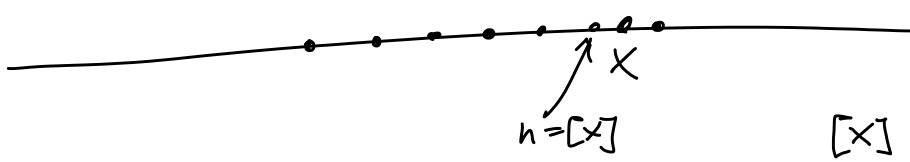
ESERCIZI

Dire se è strettamente crescente la funzione (a) $x\in\mathbb{R}_+ \mapsto \{x\}+1$

(b) $x\in\mathbb{R}\mapsto [x]+x$.

Ricorda $\quad [x] = \max\{n\in\mathbb{Z} \mid n\le x\}$

$\{x\} = x-[x]$



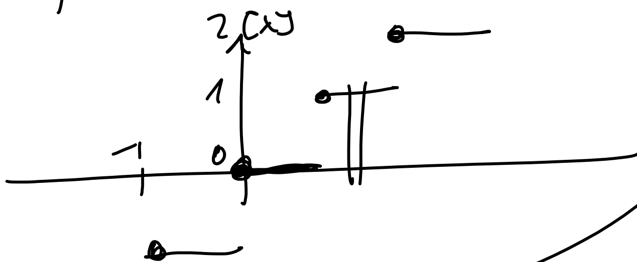
$[x]\le x<[x]+1$

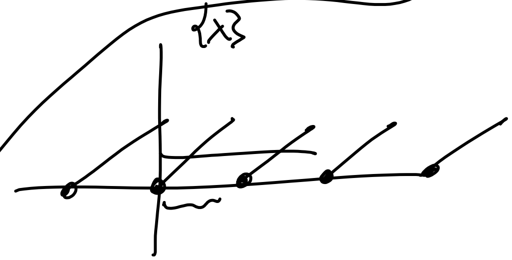
$[x]$ è l'unico intero $n \in \mathbb{Z}$ / $\underline{n \le x < n+1}$

$\{x\} = x - n$ $\qquad$ $\underline{0 \le x - n < 1}$

$\forall x$, $x = [x] + \{x\}$ $\qquad$ unico modo di scrivere x come somma di un intero ed un numero in $[0,1)$

No per (a) $\quad \{x\}+1$ non è strettamente crescente





$\underline{\{0\} = \{1\} = 0}$ $\qquad$ $\{\frac{3}{2}\} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\{\frac{1}{4}\} = \frac{1}{4}$

$\frac{3}{2} > \frac{1}{2}$

$\underline{[x]} + x$ $\qquad$ $\underline{[x] \le [y]}$ se $\underline{x \le y}$

x è strett. crescente $\qquad$ in generale se f è non decrescente e g è strett. crescente

$f+g$ è strett. crescente

$A = \{ x_n = n^2 - \sqrt{2}\, n \mid n \in \mathbb{N} \}$

max / min / sup / inf.

$\exists$ in $\mathbb{R}^*$

$\sup A = +\infty$

$\forall \; M > 0$ Voglio trovare $n \in \mathbb{N} \mid n^2 - \sqrt{2}n > M$

$$n(n-\sqrt{2}) > n > M$$

se $n \geq 3$

$n - \sqrt{2} > 1$

$3 > 1 + \sqrt{2}$

$2 > \sqrt{2}$

$4 > 2$

se $n > M \Rightarrow n^2 - \sqrt{2}\, n > M$.

(non è max)

$x_n = n^2 - \sqrt{2}\, n = n(n-\sqrt{2})$

$x_1 = -(\sqrt{2}-1)$, $x_2 = 2(2-\sqrt{2}) > 0$ $\forall n \geq 2$, $x_n > 0$.

$x_1 = -(\sqrt{2}-1) = \min A$ $(= \inf A)$