lunedì 30 novembre 2020 08:20

CAP 3: ESPONENZIALI E LOGARITMI

$2^{\sqrt{2}} \quad e^{\sqrt{2}}, \ \sqrt{2}^{e}, \dots$

Fissiamo $a>1$ ("base")

$$\underline{t} \in \underline{\mathbb{Q}} \longmapsto a^t$$

Sappiamo che $a^t>0$, è una <u>funzione strettamente crescente</u> $(a>1)$

$$\lim_{\substack{t\to+\infty \\ t\in\mathbb{Q}}} a^t = \sup_{t\in\mathbb{Q}} a^t = +\infty \qquad \left(\text{segue } a^n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty \text{ e dal T. del confronto} \right)$$

$$\lim_{\substack{t\to-\infty \\ t\in\mathbb{Q}}} a^t = \inf_{t\in\mathbb{Q}} a^t = 0. \qquad \left(\underset{t<0}{a^t} = \frac{1}{a^{-t}} \to 0 \right)$$

Inoltre abbiamo dimostrato le proprietà "algebriche".

(1) $a^{t+s} = a^t \cdot a^s$

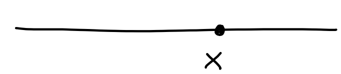
(2) $(a^t)^s = a^{ts}$

Vogliamo "estendere" queste proprietà <u>su $\mathbb{R}$</u>.

<u>Oss.</u> Fissato $x\in\mathbb{R}$

$$\underbrace{\lim_{\substack{t\to x- \\ t\in\mathbb{Q}}} a^t = \sup_{\substack{t\in\mathbb{Q} \\ t<x}} a^t}_{\text{T. Funz Mon.}} \ \le \ \underbrace{\inf_{\substack{t\in\mathbb{Q} \\ t>x}} a^t = \lim_{\substack{t\to x+ \\ t\in\mathbb{Q}}} a^t}_{\text{T. F.-M.}}$$

$$\forall \ \underset{\mathbb{Q}}{t} < \underset{\mathbb{R}}{x} < \underset{\mathbb{Q}}{s} \ \Rightarrow \ a^t < a^s$$



N.B. Questo lemma permette di definire "per continuità" a^x, $\forall x\in\mathbb{R}$, come limite di a^{r_j} con $r_j\to x$, $r_j\in\mathbb{Q}$.

$2^{\sqrt{2}} \cong 2^{1.4142}$

$2^{\frac{14142}{10000}}$

<u>Lemma</u> Sia $a>1$, $x\in\mathbb{R}$. Allora $\sup_{\substack{t\in\mathbb{Q} \\ t<x}} a^t = \inf_{\substack{t\in\mathbb{Q} \\ t>x}} a^t$

<u>Dim</u>(*) $\alpha := \sup_{\substack{t<x \\ t\in\mathbb{Q}}} a^t \qquad \beta := \inf_{\substack{t>x \\ t\in\mathbb{Q}}} a^t, \qquad \alpha\le\beta$

Supponiamo, P.A., che $\underline{\alpha<\beta}$. (*)

Sappiamo che $0 \le \boxed{\beta-\alpha \le a^t - a^s} \quad \forall \ \underset{\mathbb{Q}}{s} < x < \underset{\mathbb{Q}}{t}$, (3)

Sia $m\in\mathbb{N}$, $(m>x)$ $\forall s<x$, $0<a^s<a^m$ essendo $s<m$

Sia $\varepsilon := \dfrac{\beta-\alpha}{a^m} > 0$. Poiché $a^{\frac{1}{n}} \to 1$ per $n \to +\infty$ $\exists N$ |

$$1 < a^{\frac{1}{N}} < 1+\varepsilon$$

Siano $s, t \in \mathbb{Q}$ | $s < x < t$ e $t - s < \frac{1}{N}$ ($\exists$ per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$)

$$0 < r := t-s < \frac{1}{N}$$

$$0 < a^{r} - 1 < a^{\frac{1}{N}} - 1 < \varepsilon, \text{ Allora}$$

$$0 < a^t - a^s = a^s (a^{t-s} - 1) < \varepsilon a^s = a^s \frac{\beta-\alpha}{a^m} \underset{m > x > s}{<} \beta - \alpha$$

contraddizione con (*).

DEF. $\forall x \in \mathbb{R}$. Definiamo.

(i) $1^x := 1$

(ii) $a > 1$ $\quad \exp_a(x) := a^x := \lim_{\substack{t \in \mathbb{Q} \\ t \to x}} a^t$

(iii) $0 < a < 1$ $\quad \exp_a(x) := a^x := (a^{-1})^{-x} = \dfrac{1}{(a^{-1})^x}$

funzione esponenziale in base a

Se $a = e$ $\quad \exp_e(x) := \exp(x) = e^x$ LA FUNZIONE ESPONENZIALE

OSS. Due motivazioni per l'articolo determinativo

$$e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots$$

$$D e^x = e^x = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

Proprietà della funzione esponenziale. Siano $1 \neq a, b > 0$ (diversi da 1); $x, y \in \mathbb{R}$, allora:

- $a^{x+y} = a^x a^y$

Siano s_n e t_n succ. di razionali t.c. $s_n \to x$ e $t_n \to y$

$$a^{s_n + t_n} = a^{s_n} a^{t_n} \to a^x a^y$$

$$a^{x+y} \underset{\uparrow}{=} \lim_{n\to+\infty} a^{s_n+t_n} \underset{\uparrow}{=} \lim_{n\to\infty} a^{s_n} a^{t_n}$$

A.d.L. $s_n+t_n \to x+y$ def. di esp.

prop. alg. su $\mathbb{Q}$ (1)

- $$\begin{cases} (a^x)^y = a^{xy} \\ a^{-x} = (a^x)^{-1} \end{cases}$$ (dim. analoga)

- $a^x > 0$, se $a>1$, $a^x > 1 \iff x>0$

- $x \to a^x$ è strett. crescente se $a>1$
  " decresc. se $a<1$

- $\underline{0<a<b}$, $a^x < b^x$, $\forall x>0$.

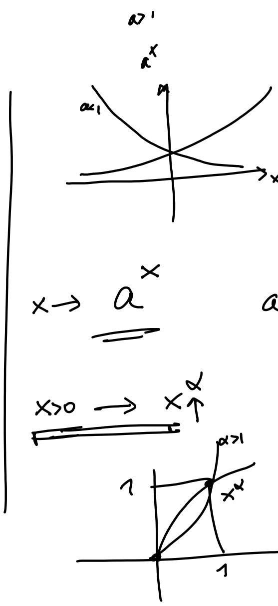
- $x \to \exp_a(x) \in C(\mathbb{R})$

- $x \to x^\alpha \in C(\mathbb{R}_+)$
  $\in C(\overline{\mathbb{R}_+})$, $\alpha>0$

$\mathbb{R}_+ = (0,+\infty)$
$\overline{\mathbb{R}_+} = [0,+\infty)$

- $a>1$, $\alpha \geq 0$ $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$.

$a<1$ $\quad \lim x^\alpha a^x = 0$ $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{a^{-x}}{x^\alpha} = +\infty$



$x \to \underline{a^x}$ $\quad a>0$, $x\in\mathbb{R}$

$\underline{x>0 \to x^\alpha}$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$

Dim. la continuità

Per il T.F.M.

$\boxed{\text{Sia } x_0\in\mathbb{R},\ a>1}$ siano $t_n < x_0$, $t_n \to x_0$, $s_n > x_0$, $s_n \to x_0$ ($t_n, s_n \in \mathbb{Q}$)

$$\underline{a^{x_0-}} := \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} a^x = \lim_{n\to\infty} a^{t_n} = \lim_{n\to+\infty} a^{s_n} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>0}} a^{x_0+} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$$

Teorema ponte sui limiti — LEMMA — Teorema ponte — DEF. degli a^{x_0} — a^{x_0} — $\exists$

$x \to a^x$ è strett. cresc. e T.F.M.

Per A.d.L. $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$ anche per $a<1$ (provando a dimostrarlo)

Dim. continuità delle potenze con esponente $\alpha>0$

Per $x_0=0$ $\quad \lim_{x\to 0} x^\alpha = 0$ $\quad \left(0<x^\alpha<\varepsilon,\ \underline{x<\varepsilon^{1/\alpha}=\delta}\right)$

Sia $x_0 > 0$

$$\boxed{x^\alpha = x_0^\alpha \left(\frac{x}{x_0}\right)^\alpha} \qquad \left((x x_0^{-1})^\alpha = x^\alpha (x_0^{-1})^\alpha = x^\alpha \frac{1}{x_0^\alpha} \right)$$

$$\lim_{x \to x_0} x^\alpha \overset{?}{=} x_0^\alpha \quad | \quad \frac{x}{x_0} = y \qquad \lim_{y \to 1} y^\alpha \overset{?}{=} 1$$

C.d.V. $y = 1+t$ $\quad y \to 1 \iff t \to 0$ $\qquad \boxed{\lim_{t \to 0} (1+t)^\alpha} \overset{?}{=} 1$

Sia $N \in \mathbb{N} \;/\; \frac{1}{N} < \alpha < N$

$0<|t|<1$

$$(1-|t|)^{\frac{1}{N}} \le (1-|t|)^\alpha \le (1+t)^\alpha \le (1+|t|)^\alpha \le (1+|t|)^N$$

$\downarrow$ per $t \to 0$. A.d.L

1

Conf. di limiti $\quad 1-|t| \to 1 \quad$ per $t \to 0$

e $\sqrt[N]{x} \to \sqrt[N]{x_0}$, per $x \to x_0$ (già dimostrato)

Verificare le altre proprietà per esercizio.

LOGARITMI

Se $a>0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R} \mapsto \exp_a(x)$ è strettamente monotona

con $\mathrm{im}(\exp_a) = (0, +\infty)$

$\left(\begin{array}{l} \text{Segue da} \bullet\ a^x > 0 \quad \forall x \\ \bullet\ \inf_{\mathbb{R}} a^x = 0, \ \sup_{\mathbb{R}} a^x = +\infty \\ !! \longrightarrow \bullet\ \text{T.V.I. e dal fatto} \\ \text{che } \exp_a \in C(\mathbb{R}) \end{array}\right)$

Def $a>0$, $a \neq 1$ $\exp_a$ è invertibile e la sua funzione inversa si chiama logaritmo in base a. In formule

$$y \in \mathbb{R} \mapsto \exp_a(y) \in (0, +\infty)$$

$$\mathbb{R} \ni \log_a x \longleftarrow x \in (0, +\infty)$$

Quindi $\log_a a^y = y$, $\quad a^{\log_a x} = x$

$\forall y \in \mathbb{R}$, $\quad \forall x > 0$.

$\left(\begin{array}{l} f \circ f^{-1}(x) = x \\ f^{-1} \circ f(y) = y. \\ f: A \xrightarrow{\text{bij}} B = \mathrm{im}(f) \end{array}\right)$

Seguono tutte le proprietà "note" del logaritmo

N.B. $\log_a x$ è una funzione cont. su $(0,+\infty)$

(T.C.F.I)

$f^{-1}: B \to A$

$f = \exp_a \qquad A = \mathbb{R}, \ B = (0,+\infty)$

Esempi

$$\log_a x = \underbrace{\log_a b \ \log_b x} \iff x = a^{\log_a b \log_b x}.$$

$$a^{\log_a b \cdot \log_b x} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b x} = b^{\log_b x} = x = a^{\log_a x}$$

$\overset{\uparrow}{\Longrightarrow}$ $\log_a b \ \log_b x = \log_a x$

iniettività di $x \to a^x$

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$xy = a^{\log_a (xy)} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}$$

Es. 3.3. Si dimostri $\boxed{\frac{1}{n+1} < \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\boxed{\log_e (x) := \log (x)}$

$\ln$.

$$\frac{1}{n+1} < \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \iff e^{\frac{1}{n+1}} < 1+\frac{1}{n}$$

$$\iff e < \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}_{E_n \downarrow e} \checkmark$$