mercoledì 4 novembre 2020 08:18

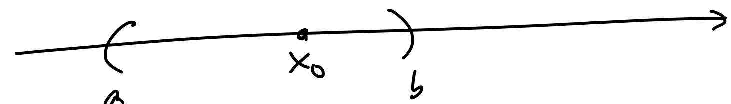
Proposizione 2.9 (proprietà degli intorni)

(i) Se U è un intorno di $x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists\, \delta > 0 \mid \underbrace{I_\delta(x_0)}_{\text{intorno simmetrico di } x_0} \subseteq U$

(ii) Se U e V sono intorni di $x_0 \in \mathbb{R}^* \Rightarrow U \cap V$ è un intorno di x_0.

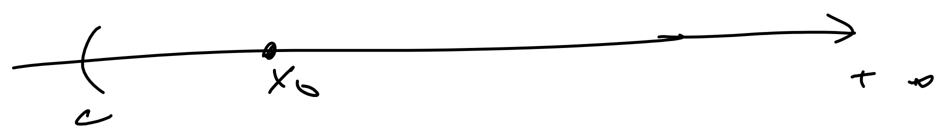
(iii) Se $x \neq y$, $x, y \in \mathbb{R}$, allora $\exists$ due intorni U e V risp. di x e y (rispettivamente) t.c. $U \cap V = \emptyset$.

__Dim.__ (i) $U = (a, b)$ con $a < x_0 < b$



- se $a, b \in \mathbb{R}$, $\delta = \min\{b - x_0, a - x_0\}$
- se uno solo degli estremi a e b è finito, chiamandolo c

$\delta = |c - x_0|$



- se $a = -\infty$ e $b = +\infty$, $\delta = ?$

(ii) se $U \cap V \neq \emptyset \Rightarrow U \cap V$ è un intervallo che contiene x_0 ossia $U \cap V$ è un int. di x_0

e $x_0 \in U \cap V$

(iii) $\underline{x < y}$ e sia $c \in (x,y)$ $U = (-\infty, c)$ e $V = (c, +\infty)$, $x \in U$, $y \in V$

$U \cap V = \emptyset$.

Proprietà dei limiti

Qui x_0 e $L \in \mathbb{R}^*$

Oss. Se il limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste $\Rightarrow$ è unico.

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = L'$ $\Rightarrow$ $L = L'$

Se, p.a., $L \neq L'$ ad esempio $L < L'$ siano U e U' due intorni di L e L' t.c. $U \cap U' = \emptyset$. $\exists$ I e J intorni di x_0 | • $f(x) \in U$, $\forall x \in I \cap A \setminus \{x_0\}$

•• $f(x) \in U'$, $\forall x \in J \cap A \setminus \{x_0\}$

ma $\bar{x} \in \underline{I \cap J} \setminus \{x_0\}$ $f(\bar{x}) \in \underline{U \cap U'} = \emptyset \Rightarrow$ contraddizione.

Teorema di permanenza del segno (2.16)

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \underline{\neq 0}$. Allora $\exists$ un intorno U di x_0 t.c. $f(x)$ e L hanno lo stesso segno

$x, y \in \mathbb{R}$ hanno lo stesso segno se $x \cdot y > 0$ | $\mathbb{R}^* = [-\infty, 0) \cup \{0\} \cup (0, +\infty]$

$x \to y \in \mathbb{R}$

$+\infty$ ha lo stesso segno di 1 | SEGNO NEGATIVO | SEGNO POSITIVO

$-\infty$ " " " di -1

Dim Per la Prop 2.9. $\exists$ intorni $U \ni 0$ e $U' \ni L$ rispettivamente di 0 e L t.c. $U \cap U' = \emptyset$

$\exists$ V int. di x_0 t.c. $f(x) \in U'$ $\forall x \in V \cap A \setminus \{x_0\}$ dove $A = dom(f)$ $\boxed{E}$

NB Se I è un intervallo che non contiene 0 $\Rightarrow$ $\forall x, x' \in I$ x e x' hanno lo stesso segno.

(deriva dalla definizione di intervallo)

Def Sia $P(x)$ una proprietà che dipende da $x \in \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

Diremo che $P(x)$ è vera vicino a x_0. se $\exists$ un intorno di x_0 U |

$P(x)$ è vera $\forall x \in U \setminus \{x_0\}$

Ad esempio: Teorema dell P. d S. $\boxed{\text{Se } \lim_{x \to x_0} f(x) = L \neq 0 \Rightarrow \text{vicino a } x_0,\ f(x) \text{ ha lo stesso segno di } L}$

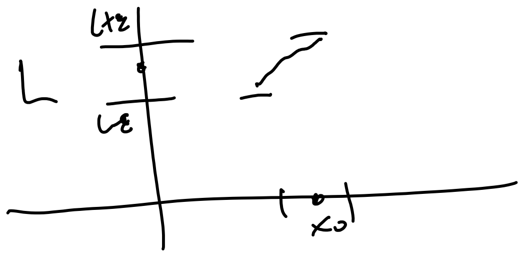
"Teoremi di confronto"

Prop 2.12 ... Sia $\lim f(x) = L \in \mathbb{R}$ Allora vicino a x_0, f è limitata, più precisamente

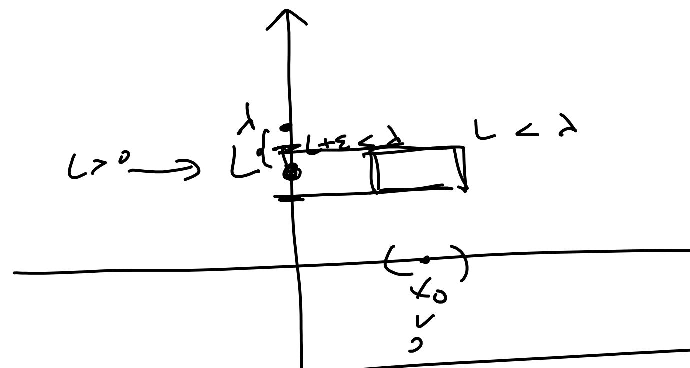
Prop ... (i) ... $x\to x_0$

$\forall\ \lambda > |L| \implies \exists\ U$ int. di x_0 t.c. $|f(x)| < \lambda \quad \forall\ x \in U\cap A - \{x_0\}$.
con $A = \mathrm{dom}(f)$.

(ii) Sia $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \neq 0$ Allora $\forall\ 0<\lambda<|L| \implies$ vicino a x_0 $|f(x)|>\lambda$ $(x\in \mathrm{dom}(f))$



(i)



Dim (i) Sia $\varepsilon = \lambda - |L|$ $\quad \exists\ U$ int di x_0 $\mid$ $|f(x)-L|<\varepsilon \quad \forall\ x\in U\cap A\setminus\{x_0\}$

$$|f(x)| = |f(x)-L+L| \leq |f(x)-L| + |L| < \varepsilon + |L| = \lambda - \cancel{|L|} + \cancel{|L|} = \lambda$$

(ii) Sia $\varepsilon = |L| - \lambda$

$$|f(x)| = |f(x)-L+L| \geq |L| - |f(x)-L| > |L| - \varepsilon = \lambda. \ \blacksquare$$

Teorema del confronto (2.18)

(i) f,g,h con dominio A, e sia $x_0 \in \mathcal{D}^* A$ e $L\in\mathbb{R}$ e supponiamo che vicino a x_0 $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = L = \lim_{x\to x_0} h(x)$.

Allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$

(ii) f, g dominio A, $x_0 \in \mathcal{D}^* A$ e $f(x) \le g(x)$ vicino a x_0

se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \implies \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

se $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty \implies \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

Dim (i) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, U$ intorno di x_0 t.c. $\boxed{f(x) \le g(x) \le h(x)}_{U_1}$ $\forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$.

$\underbrace{|f(x) - L| < \varepsilon}_{U_2}$ e $\underbrace{|h(x) - L| < \varepsilon}_{U_3}$

$U = U_1 \cap U_2 \cap U_3$

$$L - \varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) \le L + \varepsilon$$

$\implies |g(x) - L| < \varepsilon.$ $\forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$.

(ii) $\forall M < 0$ $\exists\, a \in \mathbb{R}$ | $g(x) < M$ $\forall x \in (-\infty, a)$

$\implies f(x) \le g(x) < M$, $\forall x < a$

ESERCIZI

ES 2.9 - (iv) $\quad \lim_{x \to 1} \frac{x}{(1-x)}$ $\nexists$ in $\mathbb{R}^*$

AVVISO DA DOMANI il Tutorato di matematica sarà ONLINE su TEAMS.

AVVISO RICEVIMENTO martedì alle 16 su TEAMS: prenotarsi con e-mail entro le 13 di morti di

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \nexists$

$x<1$

$1-x>0$, $\frac{x}{1-x}>1 \iff x>1-x$ $\quad 2x>1 \quad x>\frac{1}{2}$, $\quad \frac{1}{2}<x<1 \Rightarrow \frac{x}{1-x}>1$

$x>1 \iff x-1>0$, $\quad -\frac{x}{(x-1)}<-1 \iff \frac{x}{x-1}>1 \quad x>x-1$ sempre vero

se $x>1$, $\frac{x}{1-x}<-1$

$\frac{1}{2} \quad 1$

$\Rightarrow$ $\forall$ intorno U di 1 $\exists$ x_1 e $x_2 \in U\setminus\{1\}$ t.c. $f(x_1)>1$ e $f(x_2)<-1$

o $L\neq 1$ o $L\neq -1$

Se $\lim_{x\to 1} f(x) = L \in \mathbb{R}^*$

... V' ... int. di 1 t.c. $V\cap V'=\emptyset$.

Sia V un int di L e ...

$\Rightarrow \exists\, \underline{U_1 \text{ int di } 1} \;|\; \underline{f(x) \in V} \quad \forall \; x \in \underline{U \setminus \{1\}}$.

contraddi perché $\exists$ punti $\bar{x}$ in $U \setminus \{1\}$ t.c. $f(x) \notin V$!

__Morale__

se $\exists$ I e J intervalli aperti disgiunti t.c.

$\forall$ int. U di x_0 $\;\exists\; x_1$ e $x_2 \in U \setminus \{x_0\} \;|\; f(x_1) \in I$ e $f(x_2) \in J$

$\Rightarrow \nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$ in $\mathbb{R}^*$.

$B = \{ b_n = (-1)^n n^2 - (n-2)^2 \mid n \in \mathbb{N} \}$. Trovare sup/inf/max/min

$= \{-2, 4, -10, 12, \dots \}$

$$b_n = (-1)^n n^2 - n^2 + 4n - 4 \begin{cases} \underline{4(n-1)} & \text{se } n \text{ pari} \\ \underline{-2n^2 + 4n - 4} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

$\sup B = +\infty$, $\inf B = -\infty$

$4(n-1) > M \qquad n-1 > \frac{M}{4} \qquad n > \frac{M}{4} - 1$ ✓

$\underline{n \text{ pari}}$

$$-2n^2\left(1-\frac{2}{n}\right)-4 < M$$

$-2n^2+4n-4$

$$= -2n^2\left(1-\frac{2}{n}\right)-4 \le -n^2-4 < M$$

$\forall n \ge 2$

n dispari

$$n^2 \le 2n^2\left(1-\frac{2}{n}\right)$$

$$4n \le n^2$$

$$n^2 > -4-M$$