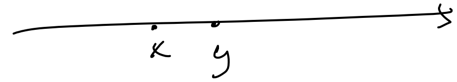
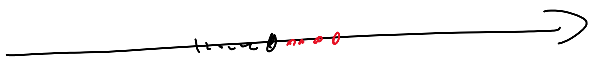
venerdì 6 novembre 2020 08:15

# LIMITI LATERALI

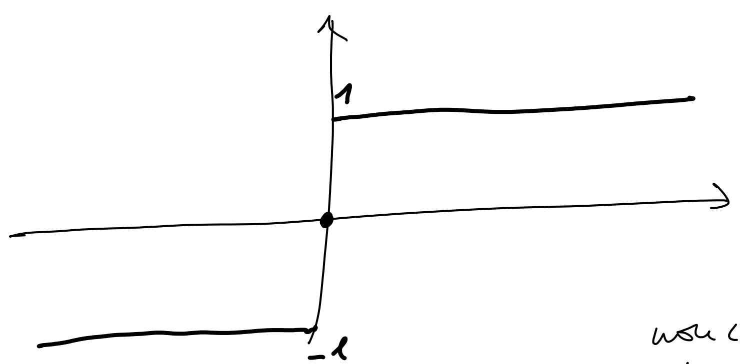
$\mathbb{R}$ è un insieme TOTALMENTE ORDINATO.



$x_0 \in \mathcal{D}A$ $\qquad f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Esempio $\qquad f(x) = sgn(x) = \begin{cases} 1, & se\ x>0 \\ 0, & se\ x=0 \\ -1, & se\ x<0 \end{cases}$ , $A=\mathbb{R}$




$\boxed{0 \in \mathcal{D}A \cap \mathring{A}}$

non c'è asterisco

$x \in \mathcal{D}A \cap \mathring{A}$ , con $A \subseteq \mathbb{R}$

$x \in \mathcal{D}^*A \cap \mathring{A}$

$\mathring{A}$

NB $\quad \mathring{A} \subseteq \partial A$

$x \in \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$

$\to x \in \mathbb{R},\ x \in \partial A \overset{DEF}{\iff} \forall\, I$ intorno di $x$, $I \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$

$\Updownarrow$ DEF

$I$ intervallo aperto che contiene $x$

$\Updownarrow$ DEF

se $x, y \in I$ e $x \leq y$, $x \leq t \leq y$

$\implies t \in I$

$\longrightarrow x \in \mathring{A} \iff \exists$ un intorno $I$ di $x$ $\mid$ $I \subseteq A$

$a \notin \mathring{A}$

$A = \mathbb{Q}$ oppure $A = \mathbb{Q}^c$

$\mathring{\mathbb{Q}} = \mathring{\mathbb{Q}^c} = \emptyset.$

Al punto $x_0 = 0$ mi posso avvicinare arbitrariamente (nel dominio di $f$) sia da sinistra che da destra

$x < 0$ $\qquad$ $x > 0$

$\downarrow$

$sg(x) = -1$

$\Downarrow$

$\lim sgn(x) = -1 \qquad \lim sgn(x) = 1 \qquad (sgn(0) = 0.)$

N.B. il valore della funzione $f$ in $x_0$ ai fini del calcolo del limite NON È RILEVANTE ($x_0$ potrebbe non appartenere ad $A$ è ovvio se $x_0 = \pm\infty$)

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \quad = \quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \quad = \quad ( \qquad )$

LIMITE DA SINISTRA — LIMITE DA DESTRA

Ovviamente ci aspettiamo che valga la seguente proposizione

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ \exists \iff \exists$ limiti laterali di $f$ per $x\to x_0$ e coincidono.

Altro esempio: $f(x)=\frac{1}{x}$, $A=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty \ , \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

$A=[0,1)$ ; $0\notin \boxed{\mathcal{D}^*A\cap(-\infty,0)=\emptyset}$

$0\in \mathcal{D}^*A\cap(0,+\infty)=[0,1]$

$\mathcal{D}^*A=$ (i) $(0,1)$ (ii) $(-\infty,0)$ (iii) $[0,1]$ (iv) $(0,1]$ (v) nessuna delle precedenti

---

DEF. $A\subseteq\mathbb{R}$, diciamo che $x_0$ è un pto di ACCUMULAZIONE SINISTRO (risp. DESTRO) di $A$

se $x_0\in\mathcal{D}^*\big(A\cap(-\infty,x_0)\big)$ [risp., $x_0\in\mathcal{D}^*\big(A\cap(x_0,+\infty)\big)$]

e diciamo che $L\in\mathbb{R}^*$ è il LIMITE DA SINISTRA (risp DA DESTRA) di $f$ per $x$ che tende a $x_0$ da sinistra (risp, da destra), se $x_0$ è un pto di accumulazione sinistro [risp,

$\forall$ intorno $V$ di $L$ $\exists$ un intorno $U$ di $x_0$ t.c. $f(x)\in V$, $\forall\, x\in A\cap U\cap(-\infty,x_0)$

risp, $\cap\,(x_0,+$

[$\lim f(x)$]

$L = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ $\left[ x \to x_0^+ \right.$

In altre parole

$L = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \iff L = \lim_{x \to x_0} \tilde{f}(x)$ dove $\tilde{f} = f\big|_{(-\infty, x_0)}$

$\left[ \begin{array}{l} \tilde{f} : A \cap (-\infty, x_0) \to \mathbb{R} \\ \forall x \in A \cap (-\infty, x_0), \ \tilde{f}(x) = f(x). \end{array} \right]$

ES.

$x_0 = 0$, $\widetilde{\mathrm{sgn}}(x)$ : $x \in (-\infty, 0) \to \widetilde{\mathrm{sgn}}(x) = -1$

DEF. $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ la RESTRIZIONE di $f$ su $B$ è la funzione $f\big|_B$ è la funzione con dominio $A \cap B$ e $\forall x \in A \cap B$, $f\big|_B(x) = f(x)$

Prop Se $x_0$ è un pto di accumulazione sia sinistro sia destro di $A$, e $f : A \to \mathbb{R}$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}^* \iff \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L.$

La dimostrazione segue immediatamente dalle definizioni. (Verificarlo!)

Le funzioni monotòne rispettano l'ordine

**Teorema** Se $f: A \to \mathbb{R}$ $\underbrace{\uparrow}_{\text{f MONOTONA}}$, $x_0 \in \mathcal{D}^*(A \cap (-\infty, x_0))$ (ossia $x_0$ è un pto di acc. sinistro)

allora $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ in $\mathbb{R}^*$

[stessa cosa da destra] ESERCIZIO!

Inoltre: se $f$ è crescente

(a) $\boxed{\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{A \cap (-\infty, x_0)} f} = \sup\{f(x) \mid x \in A \cap (-\infty, \ldots$

(b) $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf_{A \cap (x_0, +\infty)} f := \inf\{f(x) \mid x \in A \ldots$

se $f$ è decrescente,

(c) $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \inf_{A \cap (-\infty, x_0)} f$

(d) $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \sup_{A \cap (x_0, +\infty)} f$

---

**Dim** (a) $f$ crescente $\overset{def}{\iff}$ $x \leq y$, $x, y \in A \implies f(x) \leq f(y)$

$x_0 \in \underbrace{\mathcal{D}^*(A \cap (-\infty, x_0))}_{\neq \emptyset}$,

Sia $L = \sup_{A \cap (-\infty, x_0)} f \implies L$ è

- NO (i) $L \in \mathbb{R}$
- (ii) NO $L$ può essere $\pm\infty$
- NO (iii) $L$ non può es...
- (iv) ~~$L$ non " "~~
- (v) nessuna delle
- (vi) NO $f(x_0)$

$L = \sup\{f(x) \mid x \in A \cap (-\infty, x_0)\}$

$L \geq f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$ con $\bar{x} \in A \cap (-\infty, x_0)$

$\implies L \neq -\infty$

$x^n + y^n = z^n$ non ha soluzioni intere $x, y, z$ in $\mathbb{Z}$ per $n \geq 3$ a parte quelle banali $(0,1)$.

$3^2 + 4^2 = 5^2$ $\quad n \geq 3 \quad$ IV sec. A.C. Diofanto

Fermat nel 1600: so fare la dimostrazione

Andrew Wiles. 1994 l'ha finalmente dimostrata.

---

$f$ crescente $\quad x_0 \in \mathcal{D}^*(A \cap (-\infty, x_0))$, $\quad L := \sup_{A \cap (-\infty, x_0)} f > -\infty$.

Sia $V$ un qualunque intorno di $L$ e sia $a \in V$, $a < L$

Poichè $L = \sup\{f(x) \mid x \in A \cap (-\infty, x_0)\}$ $\quad \exists \quad \bar{x} \in A \cap (-\infty, x_0)$ $\quad f(\bar{x}) > a$.

$\bar{x} < x_0$

$\forall \; x > \bar{x} \quad f(x) \geq f(\bar{x}) \implies$

Sia $U = (\bar{x}, +\infty) \ni x_0$ (quindi $U$ è un intorno di $x_0$).

e $x \in U \cap A \cap (-\infty, x_0) = (\bar{x}, x_0) \cap A$

$U \cap (-\infty, x_0) = (\bar{x}, x_0)$

$x > \bar{x}$, $L \geq f(x) \geq f(\bar{x}) > a \implies$ $f(x) < b$

per definizione di intervallo.

---

[GE, cap 3]

Usando la definizione di limite verificare che

(Ricordo una successione $\boxed{\begin{array}{l} x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \in \mathbb{N} \mapsto x_n \in \mathbb{R} \end{array}}$)

$\boxed{\mathcal{D}\mathbb{N} = \{+\infty\}}$

$\mathbb{N} = \mathcal{I}\mathbb{N} :=$ punti isolati di $\mathbb{N}$

$n \in \mathcal{I}\mathbb{N} \overset{DEF}{\iff} \exists\, I$ intervallo aperto $\mid$ $I \cap \mathbb{N} = \{n\}$

$\forall n \quad (n-1, n+1)$

ES.1 $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2+4}{2n^2+3} = \frac{1}{2}$

$|f(x) - L| < \varepsilon.$

$x_n - \frac{1}{2}$ $\quad \displaystyle \frac{n^2+4}{2n^2+3} - \frac{1}{2} = \frac{\cancel{2n^2}+8 - \cancel{2n^2}-3}{(2n^2+3)\cdot 2}$

$\displaystyle = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2n^2+3}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \mid \forall n > N, \quad -\varepsilon < x_n - \frac{1}{2} < \varepsilon$

Voglio $\displaystyle \frac{5}{2} \frac{1}{2n^2+3} < \varepsilon \iff \frac{1}{2n^2+3} < \frac{2}{5}\varepsilon$

?

$\displaystyle \ldots 2 \ldots \frac{5}{\ldots} - 3 \iff n^2 > \left(\frac{5}{4\varepsilon} - \frac{3}{2}\right.$

$$\iff 2n^2+3 > \frac{5}{2\varepsilon} \iff 2n^2 > \frac{5}{2\varepsilon} - 3$$

$$N = \left|\frac{5}{4\varepsilon} - \frac{3}{2}\right|^{\frac{1}{2}} \qquad n > N \Rightarrow n^2 > N^2 = \left|\frac{5}{4\varepsilon} - \frac{3}{2}\right| \geq \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{3}{2}.$$

---

ES 4 $\lim_{n\to\infty} \left(n - \sqrt{n^2-1}\right) = 0.$

$$n > \sqrt{n^2-1} \iff n^2 > n^2-1$$

$n, \sqrt{n^2-1} \geq 0$

$$n - \sqrt{n^2-1} = \frac{\left(n-\sqrt{n^2-1}\right)\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)}{n+\sqrt{n^2-1}} = \frac{n^2-(n^2-1)}{n+\sqrt{n^2-1}} = \frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}} < \varepsilon$$

$$n + \sqrt{n^2-1} > \frac{1}{\varepsilon} \qquad n + \sqrt{n^2-1} \geq n > \frac{1}{\varepsilon} ) \qquad N = \frac{1}{\varepsilon}$$

---

$$\lim_{n\to+\infty} n^{3/2} - \sqrt{n^2-1} = +\infty$$

$$\frac{\left(n^{3/2} - \sqrt{n^2-1}\right)\left(n^{3/2} + \sqrt{n^2-1}\right)}{n^3 \ldots} = \frac{n^3 - n^2 + 1}{n^{3/2} + \sqrt{n^2-1}} = \frac{n^3\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\right)}{n^{3/2}\left(1 + \frac{\sqrt{n^2-1}}{n^{3/2}}\right)}$$

$n^{\cdot 2} + \sqrt{n^2-1}$ ... $n^{-2}$)

dè $n \geq 4$

$$= n^{3/2} \quad \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{\sqrt{n^2-1}}{n^{3/2}}} > n^{3/2} \quad \frac{1 - \frac{1}{n}}{\frac{3}{2}}$$

$3 - \frac{3}{2}$

$$\frac{\sqrt{n^2-1}}{n^{3/2}} \leq \frac{1}{2} \iff \sqrt{n^2-1} \leq \frac{1}{2} n^{3/2}$$

$$\iff n^2 - 1 \leq \frac{1}{4} n^3$$

$$1 + \frac{\sqrt{n^2-1}}{n^{3/2}} \leq \frac{3}{2}$$

$$\frac{n^3}{4} \underset{4}{\geq} n^2 > n^2 - 1$$

$n \geq 4$

$$n^{3/2} \quad \frac{1 - \frac{1}{n}}{\frac{3}{2}} > M$$

$$\frac{2}{3} n^{3/2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) > \cancel{2} \frac{n^{3/2}}{3} \frac{1}{\cancel{2}} > M \qquad n > 3 M^{2/3}$$

$$1 - \frac{1}{n} \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > \frac{1}{2}$$