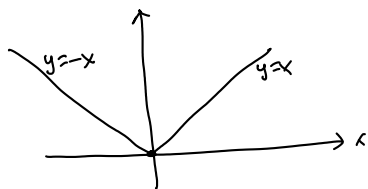


Module $x \in \mathbb{R} \mapsto |x| = \max \{x, -x\} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$



Def $x, y \in \mathbb{R}$, $d(x, y) := \text{distanza di } x \text{ da } y := |x - y|$

Proprietà (i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

" $\Rightarrow$ "

$$\max \{x - y, y - x\} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - y \leq 0 \\ y - x \leq 0 \end{cases} \stackrel{(S_0)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x \leq y \\ y \leq x \end{cases} \stackrel{(O_2)}{\Leftrightarrow} x = y.$$

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ (disuguaglianza triangolare)

(iii') è conseguenza della disuguaglianza triangolare del modulo

$|x + y| \leq |x| + |y|$ $\leftarrow$

Osservazione se $c \geq 0$, $|x| \leq c \Leftrightarrow \underbrace{-c \leq x \leq c}$

Dm. " $\Rightarrow$ " $\max \{x, -x\} \leq c$ ossia $\begin{cases} x \leq c \\ -c \leq x \end{cases}$ e $\underbrace{-x \leq c}$

$\begin{matrix} \uparrow \\ -c - x \leq 0 \rightarrow -c \leq -(-x) = x \\ \uparrow \\ (S_0) e (S) \end{matrix}$ $-c \leq x$

" $\Leftarrow$ " Assumiamo che $-c \leq x \leq c$

$x \leq c$, $-c \leq x \Leftrightarrow -x \leq c$

$\Rightarrow \max \{x, -x\} \leq c$ $\square$

Segue che $\forall x$, $-|x| \leq x \leq |x|$
(con $c = |x|$)

$-(|x| + |y|) = -|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$

Dis. triang per la distanza $d(x, y) = |x - y| = |x - y + 0| = |x - y + z - z|$
 $= |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$ $\square$

$\forall x, y$ si ha che $\underbrace{|x| |x - y| \geq |x| - |y|}_{\text{triangolo}} \quad \text{cioè} \quad d(x, y) \geq d(x, 0) - d(0, y)$

OR. $|x|$ è simmetrica in $x \in y$

$$|x-y| = |y-x| \geq ||y|-|x|| = ||x|-|y|| \quad |f(x,y) = f(y,x)|$$

Posso assumere che $|x| \geq |y|$ e in questo caso (x) diventa

$$|x-y| \geq \underbrace{|x|-|y|}_0 \Leftrightarrow |y|+|x-y| \geq |x|$$

Infatti,

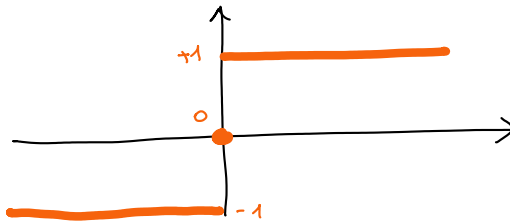
$$|x| = |x+y-y| = |x-y+y| \leq (x-y)+|y| \quad \square$$

Altre funzioni elementari.

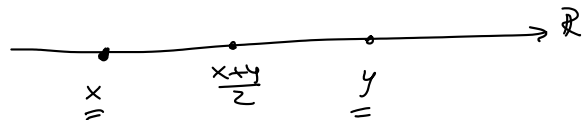
$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \text{dominio } \mathbb{R}.$$

↑
segno di x

$$\text{im}(\text{sgn}) = \{1, -1, 0\}$$



media aritmetica di x e y , $\frac{x+y}{2}$



$$x \leq y \quad d(x,y) = |x-y| = y-x > 0$$

$$y = x + d(x,y) = x + (y-x)$$

$$\begin{aligned} \text{"il punto di mezzo"} \quad \underline{\underline{\frac{x+y}{2}}} &= \underline{\underline{x}} + \left(\frac{d(x,y)}{2} \right) = x + \frac{y-x}{2} = \\ &= \frac{2x + y - x}{2} = \frac{x+y}{2}. \end{aligned}$$

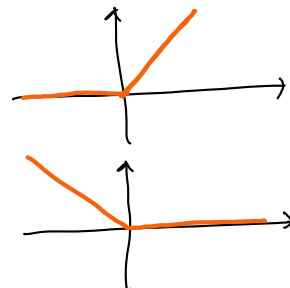
$$\left(\underline{\underline{\frac{x+y}{2}}} \text{ è l'unico punto } z \text{ t.c. } d(z,x) = d(z,y) \right)$$

numeri reali

funzione parte positiva e parte negativa. Dominio $\mathbb{R}$.

$$x^+ = \frac{|x|+x}{2} = \begin{cases} x & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

$$x^- = \frac{|x|-x}{2} = \begin{cases} 0 & , \quad x \geq 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x^+ + x^- = |x| \\ x^+ - x^- = x \\ x^\pm \geq 0 \end{cases}$$

$$(-2)^+ = 0$$

$$(-\sqrt{2})^- = \sqrt{2}$$

12.1.17

Def $\mathbb{N}$ è il più piccolo sottoinsieme induttivo di $\mathbb{R}$ ossia $\mathbb{N} = \bigcap_{I \text{ induttivo}} I$

Def. I è induttivo se
 (i) $1 \in I$
 (ii) $\forall x \in I \Rightarrow x+1 \in I$

Domanda. perché $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$? $\left(\frac{1}{2} = 2^{-1} = (1+1)^{-1}\right)$

Perché l'insieme $I = \{1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ è induttivo.

$$\mathbb{N} \subseteq I$$

($1 \in I$, $x \in I$ se $x=1$, $1+1=2 \in I$,
 e $x \geq 2$, $x+1 \geq 2+1 > 2$, $\Rightarrow x+1 \in I$).

Perché $2 < x < 3 \Rightarrow x \notin \mathbb{N}$?

Perché $I = \{1\} \cup \{2\} \cup \{x \geq 3\}$ è induttivo

Prop 1.25^(*) $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ t.c. $n < x < n+1 \Rightarrow x \notin \mathbb{N}$.

Useremo la Dimostrazione per induzione (Date proposizioni P_n che dipendono da $n \in \mathbb{N}$.
 [se P_1 è vera] e $[P_n \Rightarrow P_{n+1}] \Rightarrow P_n$ è vera, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dim ha P_n la seguente proposizione

(P_n) se $k \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R} \mid k \leq n$, $k < x < k+1$. Allora $x \notin \mathbb{N}$.

(P_1) è vera ($\{1\} \cup \{x \geq 2\}$ è indutt. $\Rightarrow 1 < x < 2 \Rightarrow x \notin \mathbb{N}$)

Vogliamo dimostrare che $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

Supponiamo, per assurdo che valga P_n e che P_{n+1} sia falsa.

$\exists k \leq n+1$ e in $k < x < k+1$ con $x \in \mathbb{N}$

Ma poiché P_n è vera $\Rightarrow k = n+1 \Rightarrow \exists x \in \mathbb{N}$, $n+1 < x < n+2$

Definiamo $I := \mathbb{N} \setminus \{x\}$. Se I è induttivo abbiamo una contraddizione

essendo $I \subsetneq \mathbb{N}$.

$x > n+1 > 1 \Rightarrow x \neq 1$

$\Rightarrow 1 \in I$

da $m \in I$ also $(I \subseteq \mathbb{N}) \quad m \in \mathbb{N} \Rightarrow m+1 \in \mathbb{N}$
 e $m+1 \neq x \quad \left(\begin{array}{l} \text{for } x = m+1 \Rightarrow n+1 < m+1 < n+2 \\ \Rightarrow \underline{n < m < n+1} \text{ not possible for } P_n \end{array} \right)$
 $m+1 \in I. \quad \square$