Definizioni

- Una serie a termini $a_k \in \mathbb{R}$ è la successione $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$

  Studiare una serie significa studiare il comportamento della successione S_n ed in particolare il $\lim_{n\to+\infty} S_n =: \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

- comportamenti possibili: Una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ può essere
  - CONVERGENTE $\Leftrightarrow S_n \to \alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathbb{R}$
  - DIVERGENTE $\Leftrightarrow S_n \to +\infty$ opp. $S_n \to -\infty$
  - IRREGOLARE $\Leftrightarrow S_n$ non ha limite.

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ è convergente (a $\frac{\pi^2}{6}$ ← curiosità)
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ è divergente a $+\infty$
- $a_k = (-1)^{k-1}$,

$$S_n = \begin{cases} a_1 = 1 & n=1 \\ 0 & n=2 \\ 1 & n=3 \\ 0 & n=4 \\ 1 \end{cases} \qquad S_n = \frac{1-(-1)^n}{2}$$

$a_1 + a_2 = 1 - 1 = 0$.

S_n è irregolare.

Altro esempio di serie irregolare $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$, con $x \leq -1$

- Diremo che due serie $\sum a_k$ e $\sum b_k$ HANNO LO STESSO COMPORTAMENTO se si comportano nella stessa maniera: o convergono entrambe (non necessariamente allo stesso numero) o sono entrambe irregolari – o divergono entrambe a $+\infty$ o $-\infty$.

  In simboli $\sum_{1}^{\infty} a_k \approx \sum_{1}^{\infty} b_k$

ATTENZIONE

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ $\quad t_n \sim S_n \quad \sum a_k \sim \sum b_k$

significa che $\frac{S_n}{t_n} \to 1$. $\Longrightarrow$ $\sum a_k \approx \sum b_k$ ⟵ diverso.

$\Leftarrow$ NO.

- $\sum a_k$ è una SERIE A TERMINI POSITIVI se $a_k > 0$, $\forall k$

  " " A SEGNI ALTERNI se $a_k a_{k+1} < 0$, $\forall k$

  " " TELESCOPICA se $a_k = b_k - b_{k+1}$, $\forall k$

" " ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE se converge la serie $\sum_1 |a_k|$.

$\zeta(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ è una serie a termini positivi.

La serie di Mengoli $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ è una serie telescopica perché

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)}, \quad \left(b_k = \frac{1}{k}\right).$$

N.B. Se $s_n = \sum_1^n a_k = \sum_1^n (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}$

s_n converge $\Leftrightarrow$ $b_n \to 0$. ed in tal caso $\boxed{\sum_1^\infty a_k = b_1}$.

D'altra parte, data $\sum a_k$ se poniamo $\boxed{b_n := -\sum_{k=1}^{n-1} a_k}$

$$b_n - b_{n+1} = -\sum_{k=1}^{n-1} a_k + \sum_{k=1}^{n} a_k = a_n.$$

Quindi ogni serie può essere vista come una serie telescopica.

Os. $\sum_{k=3}^{\infty} x^k$ è una serie

Es. se $|x|<1$, $\sum_{k=3}^{\infty} x^k = ?$

$$\sum_{k=3}^{\infty} x^k = x^3 + x^4 + \dots = x^3(1 + x + x^2 + \dots)$$

$$= x^3 \sum_{k=3}^{\infty} x^{k-3} = x^3 \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{x^3}{1-x}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}$ ($x + x^2 + \dots$)

$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$

$= 1 + x + x^2 + \dots$

$$\sum_{k=-2}^{+\infty} x^k = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + x + \dots \qquad 0 < |x| < 1.$$

$$= \frac{1}{x^2}(1 + x + x^2 + \dots) = \frac{1}{x^2} \frac{1}{1-x} = \frac{x^{-2}}{1-x}$$

$$\boxed{\sum_{k=m}^{+\infty} x^k = \frac{x^m}{1-x}}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

Os. $\sum_{k=m}^{\infty} a_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{m+j-1} = a_m + a_{m+1} + \dots$ ✓

$= a_m + a_{m+1} + \dots$

$m \in \mathbb{Z}$

Proposizione 4.8 (proprietà fondamentali delle serie)

✓ (i) Se $\sum a_n$ converge $\Rightarrow$ $a_n \to 0$

(ii) Se $\sum_1^\infty a_n = \alpha$ e $\sum_1^\infty b_n = \beta$ $(\alpha,\beta \in \mathbb{R})$ $\Rightarrow$ $\sum_{n=1} (c a_n + d b_n) = c\alpha + d\beta$.

(iii) Se $\sum a_n$ converge e $b_n \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\sum (a_n + b_n) \approx \sum b_n$.

(iv) $\sum_{n=1}^\infty a_n \approx \sum_{n=m}^\infty a_n$, $\forall m \in \mathbb{N}$. e se $\sum a_n$ converge allora $\lim_{m\to+\infty} \underbrace{\sum_{k=m}^\infty a_n}$ $= 0$.

"CODE DI UNA SERIE"

✓ (v) Una serie a termini positivi o converge a $s \in (0,+\infty)$ o diverge a $+\infty$.

(vi) Una serie $\sum a_n$ assolutamente convergente è convergente ed in tal caso

CRITERIO DI CONVERGENZA ASSOLUTA

$$\sum_1^\infty a_n = \sum_1^\infty a_n^+ - \sum_1^\infty a_n^- \quad \text{e} \quad \left|\sum_1^\infty a_n\right| \le \sum_1^\infty |a_n|.$$

Dim (i) e (v) già dimostrati.

(ii) $s_n = \sum_1^n a_k$ e $t_n = \sum_1^n b_k$ se $s_n \to \alpha$ e $t_n \to \beta$ dall'A.d.L. segue che

$$c\,s_n + d\,t_n = \sum_{k=1}^n (c\,a_k + d\,b_k) \longrightarrow c\,\alpha + d\beta = c\sum_1^\infty a_k + d\sum_1^\infty b_k$$

(iii) $s_n = \sum_{k=1}^n a_k \to \alpha \in \mathbb{R}$. Sia $t_n := \sum_{k=1}^n b_k$. $\quad s_n + t_n \overset{?}{\approx} t_n$

Se t_n diverge a $+\infty$ $(o\ -\infty)$ o a β dall'A.d.L. segue $s_n + t_n \to +\infty,\ -\infty,\ \alpha+\beta$ rispett.

Se t_n è irregolare $\Rightarrow$ $s_n + t_n$ è irregolare (altrimenti se $s_n + t_n \to L \in \mathbb{R}^*$ $\Rightarrow$ dall'A.d.L. $t_n = (s_n + t_n) - s_n \to L - \alpha$)

(convenzione che
$+\infty - \alpha = +\infty$
$-\infty - \alpha = -\infty$
$(\alpha \in \mathbb{R})$)

(iv) Sia $t_m := \sum_{k=m}^{+\infty} a_k$ $\qquad t_m \approx s_m$

Fissiamo m. $t_m = \lim_{n\to+\infty} \boxed{\sum_{k=m}^n a_k}$ se $n \ge m$, $\underbrace{\sum_{k=m}^n a_k}_{z_n} = \underbrace{\sum_{k=1}^n a_k}_{s_n} - \left(\sum_{k=1}^{m-1} a_k\right)$

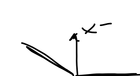
$\boxed{s_n = \alpha + z_n}$ con $\alpha = \sum_{k=1}^{m-1} a_k \in \mathbb{R}$

$s_n \approx z_n$ segue da (iii).

Inoltre (se $\sum a_k$ converge) $t_m = \sum_1^\infty a_k - \sum_{k=1}^{m-1} a_k \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$.

$\sum_1^\infty a_k$.

(vi) Ricorda $x \in \mathbb{R}$, $x^+ = \max\{x, 0\}$, $x^- = \max\{-x, 0\}$. e $x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^-$



$0 \le a_n^\pm \le |a_n| \qquad 0 \le \sum_1^n a_k^\pm \le \sum_1^n |a_k|$

se $\sum_1^\infty |a_k| < +\infty$ $\Rightarrow$ $0 \le \sum_1^\infty a_k^\pm < \infty$

e in tal caso

dal punto (ii)

$$\sum_1^n a_k = \sum_1^n (a_k^+ - a_k^-) = \sum_1^n a_k^+ - \sum_1^n a_k^-$$
$$\downarrow$$
$$\underline{\underline{\sum_1^\infty a_k}} = \underline{\sum_1^\infty a_k^+ - \sum_1^\infty a_k^-}$$

e

$$\left|\sum_1^n a_k\right| \le \sum_1^n |a_k|$$
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$\left|\sum_1^\infty a_k\right| \le \sum_1^\infty |a_k| \,. \qquad \square$$

N.B. Se $\sum a_k$ è assolutamente conv. $\Longrightarrow$ $\sum a_k$ è conv.

Il viceversa non è vero.!

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge, ma $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = S(1) = +\infty$.

CRITERI DI CONVERGENZA PER SERIE A TERMINI POSITIVI

CRITERIO 1 (CONFRONTO)

(i) Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ successioni di numeri positivi e $c>0$ | $a_n \le c\, b_n$ definitivamente ($\exists N \mid \forall n \ge N$).

$$\sum b_n < \infty \Longrightarrow \sum a_n \text{ converge}$$
$$\sum a_n = +\infty \Longrightarrow \sum b_n \text{ diverge.}$$

(ii) (confronto asintotico) se $\lim \frac{a_n}{b_n} = c > 0 \Longrightarrow \sum a_n \approx \sum b_n$.

(in particolare se $a_n \sim b_n \Longrightarrow \sum a_n \approx \sum b_n$)

Dim (i) $\sum_{k=N}^{n} a_k \le c \sum_{k=N}^{n} b_k \quad \forall\, n \ge N$

$$\downarrow$$

$\underline{\sum_{k=N}^{\infty} a_k} \le c \sum_{k=N}^{\infty} b_k \in \mathbb{R}$ (per confronto tra successioni).

$\sum_1^\infty b_k < \infty \Longrightarrow \sum_1^\infty a_k < \infty$.

se invece $\underline{\sum_{k=N}^{n} a_k \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty} \Longrightarrow c \cdot \sum_{k=N}^{n} b_k \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \Longrightarrow \underline{\sum_N^\infty b_k = +\infty}$.

(ii) $\frac{a_n}{b_n} \to c > 0$ dal teorema di confronto per successioni segue che $\exists N : \underline{\forall n \ge N}$:

$\frac{c}{2} \le \frac{a_n}{b_n} \le 2c$, $\quad b_n \le \frac{2}{c} a_n \quad$ e $\quad a_n \le 2c\, b_n$.

... punto (i).

$\Rightarrow \quad \sum a_n \approx \sum b_n$ per il punto .

CRITERIO DELLA RADICE $\quad a_n > 0$.

(i) Se $\exists\ 0 < \theta < 1 \mid a_n^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a_n} \le \theta$ definitivamente $\Rightarrow \sum a_n$ converge

Se $a_n^{\frac{1}{n}} \ge \theta$ definitivamente con $\theta \ge 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverge.

(ii) Sia $\lim a_n^{\frac{1}{n}} = \theta \in \mathbb{R}^*$ se $\theta < 1 \Rightarrow \sum a_n$ converge

$\theta > 1. \Rightarrow \sum a_n$ diverge.

Dim. Segue dal confronto con la serie geometrica $\sum \theta^n$. Infatti:

(i) $\sqrt[n]{a_n} \le \theta < 1, \quad \forall n \ge N$

$\Updownarrow$

$a_n \le \theta^n \qquad \sum \theta^n < \infty \Rightarrow \sum a_n$ converge. per confronto.

$\uparrow$

$\theta < 1$

Se $\sqrt[n]{a_n} \ge \theta \ge 1 \quad \forall n \ge N \quad \Leftrightarrow \quad a_n \ge \theta^n \quad \forall n \ge N.$

$\Rightarrow a_n \not\to 0. \Rightarrow \sum a_n = +\infty.$

(ii) Se $\lim a_n^{\frac{1}{n}} = \theta < 1$, $\quad 0 \le \theta$.

Per i teorema di confr. se $\theta < L < 1 \Rightarrow \exists N \mid a_n^{\frac{1}{n}} < L \quad \forall n \ge N$.

Quindi $\sum a_n$ converge per il punto (1).

Se $\lim a_n^{\frac{1}{n}} = \theta > 1 \quad \exists\ L > 1 \mid a_n^{\frac{1}{n}} > L \quad \forall n \ge N$

$\Rightarrow \sum a_n = +\infty$ per il punto (i). ∎

Attenzione se $\lim a_n^{\frac{1}{n}} = 1$ non si può dire nulla:

$$\sqrt[n]{\underbrace{\frac{1}{n^\alpha}}_{a_n}} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^\alpha \to 1, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum \frac{1}{n} = +\infty$$

CRITERIO DEL RAPPORTO $\quad a_n > 0$

(i) Se $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le \theta$ con $0 < \theta < 1$ definitiv. $\Rightarrow \sum a_n$ converge

definitiv. $\Rightarrow \sum a_n$ diverge

con $\theta \ge 1$

se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \theta$ con ...

(ii) se $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \theta \in [0,1) \Rightarrow \sum a_n$ conv.

se $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \theta$ con $\theta > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverge.

Dim. (i) supponiamo $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \theta \quad \forall\, n \geq N$

$$a_{N+k} \leq a_{N+k-1}\,\theta \leq a_{N+k-2}\,\theta^2 \leq \dots \leq a_N\,\theta^k \qquad \forall\, k \geq 0. \quad a_{N+k} \leq a_N\,\theta^k.$$

per confronto se $\theta < 1$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k}$ converge $\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} a_k$ converge

se invece $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \theta \quad \forall\, n \geq N$ $\quad a_{N+k} \geq a_N\,\theta^k \geq a_N \Rightarrow$ la serie diverge.

(ii) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \theta < 1 \qquad \forall\ \theta < L < 1 \quad \exists N \mid \frac{a_{n+1}}{a_n} < L < 1 \quad \forall\, n \geq N$

$\Rightarrow \sum a_n$ conv. per il punto (i)

e analog. se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \theta > 1 \quad \exists\, +\infty > L > 1 \mid \exists N \mid \frac{a_{n+1}}{a_n} > L \quad \forall\, n \geq N$

$\Rightarrow \sum a_n$ diverge per il punto (i). $\square$